Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON W. SÜSS

65. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 30. JULI 1956)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**
wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W35 Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

65. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Huckemann, F., Zur Darstellung von Riemannschen Flächen durch Streckenkomplexe 215

Huckemann, F., Über den Einfluß von Randstellen Riemannscher Flächen auf die Wertverteilung 240

Vogel, W., Die Annäherung guter Strategien bei einer gewissen Klasse von Spielen 283

Dolph, C. L., and R. K. Ritt, The Schwinger variational principles for one-dimensional quantum scattering 309

Huckemann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 215—239 (1956)

Zur Darstellung von Riemannschen Flächen durch Streckenkomplexe*)

Von
Friedrich Huckemann

Einleitung

§ 1. Bekannt ist die Konstruktion des Streckenkomplexes für schlichtartige (einfach zusammenhängende) Riemannsche Flächen, deren Windungspunkte sich in endlich viele Grundpunkte projizieren[1]): Man verbindet diese Punkte durch eine geschlossene doppelpunktfreie Jordan-Kurve L und zerschneidet die Fläche über L in allen ihren Blättern; sie zerfällt so in (im allgemeinen unendlich viele) Halbblätter, *Innengebiete* und *Außengebiete*, deren Zusammenhang auf der Fläche man in einem Streckenkomplex wiedergibt. Der Streckenkomplex spiegelt die Verheftung der Halbblätter über gewissen Teilbogen von L wider: zu einem bestimmten Streckenkomplex gehört bei gegebener Zerschneidungskurve und darauf gegebenen Grundpunkten stets eine bis auf zyklische Vertauschung der Grundpunkte wohlbestimmte Riemannsche Fläche. $\mathfrak{M}$ sei die Klasse aller einfach zusammenhängenden Flächen, deren Windungspunkte sich in endlich viele Grundpunkte projizieren.

Der Streckenkomplex erwies sich in vielen Problemen der Wertverteilungslehre als ein sehr kräftiges Hilfsmittel, denn er gestattet, jede Fläche $M \in \mathfrak{M}$ durch einen Streckenkomplex in übersichtlicher Weise darzustellen. Allerdings versagt dieses Hilfsmittel zunächst bei Riemannschen Flächen, deren Verzweigungsstellen nicht mehr über endlich vielen Grundpunkten liegen, denn dieser Streckenkomplexbegriff S ist auf die Klasse $\mathfrak{M}$ zugeschnitten; andererseits sind die nicht über endlich vielen Grundpunkten verzweigten Flächen natürlich von besonderem Interesse für die Theorie der Wertverteilung: eine Fläche $M \in \mathfrak{M}$ hat als Randstellen beispielsweise nur logarithmische Windungspunkte. Nun gibt der Streckenkomplex nur eine topologische Darstellung des Aufbaus einer Riemannschen Fläche aus *Halbblättern*; man wird also fragen, ob es denn nicht möglich sei, auch solche Flächen durch einen Streckenkomplex darzustellen, die zwar die Eigenschaft, nur über endlich vielen Punkten verzweigt zu sein, nicht haben, sich aber immer noch aus Halbblättern aufbauen, also Flächen sind, deren Verzweigungspunkte und Randstellen über einer geschlossenen doppelpunktfreien Jordan-Kurve L

*) Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert; ich sage dafür meinen Dank.

[1]) Nevanlinna [4], [5] Kap. XI § 2; Elfving [1]. Man verwendet die Konstruktion hauptsächlich bei der Unterklasse der einfach zusammenhängenden Flächen aus der Klasse der schlichtartigen Flächen.

der Ebene liegen. Es zeigt sich, daß mit einer geeigneten Definition des Streckenkomplexes, die von der bisher gegebenen in einigen Punkten abweicht, die Frage positiv zu beantworten ist.

§ 2. Auch in der Vergangenheit wurden schon Abänderungen und Verallgemeinerungen des Streckenkomplexbegriffes vorgenommen, um den Bereich der Flächen zu erweitern, die sich in einem Streckenkomplex darstellen lassen: Man ordnete jedem Grundpunkt a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ einer nur über diesen Punkten verzweigten Fläche M ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_ν der Art zu, daß $a_\nu \in G_\nu$ und daß zwei verschiedene Gebiete G_ν, G_μ positiven Abstand voneinander haben; schiebt man nun einen Windungspunkt über a_ν in einen beliebigen Punkt $a'_\nu \in G_\nu$ — wobei verschiedene Windungspunkte der Sorte a_ν auch über verschiedene Punkte geschoben werden können — so entsteht aus M eine Fläche M'; dieser wurde der Streckenkomplex der Fläche M zugeordnet. Eine solche Verwendung des Streckenkomplexes findet sich mehrfach in der letzten Zeit.

Eine weitere naheliegende Erweiterung bestände darin, zuzulassen, daß ein Gebiet G_ν mit einem anderen G_μ einen Berührungspunkt gemeinsam habe. Eine Begriffsbildung dieser Art wurde schon von ULLRICH in Vorlesungen und Vorträgen verwendet, sie findet sich in der Literatur später bei seinem Schüler HANCK[2]) und bei TEICHMÜLLER[2]), jedoch in einer Weise, die das Hauptaugenmerk auf bestimmte Anwendungsmöglichkeiten richtet. Dies bedingte, daß die eigentliche Definition eines erweiterten Streckenkomplexbegriffes unterblieb, denn der Blick auf die Anwendung brachte es mit sich, daß der erweiterte Begriff nur so weit beleuchtet wurde, als für die Anwendung erforderlich war.

§ 3. Es erscheint nunmehr natürlich, einen erweiterten Streckenkomplexbegriff axiomatisch einzuführen. Eine Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Gesprächen mit Miss M. L. CARTWRIGHT über diesen Gegenstand, in denen mir das Fehlen einer allgemeinen Definition für den erweiterten Begriff des Streckenkomplexes deutlich wurde. Es zeigt sich, daß eine geeignete Definition eine weit umfassendere Flächenklasse der streckenkomplexmäßigen Darstellung zugänglich macht, als man nach den bisherigen Erweiterungen vielleicht erwartet hätte: Nicht nur ist es nicht erforderlich, daß überhaupt nur über endlich vielen Punkten Verzweigungen vorkommen, sondern es ist nicht einmal notwendig, daß am Rand der einzelnen Halbblätter nur endliche viele Verzweigungspunkte oder Randstellen liegen.

Ich beschränke mich auf diejenigen einfach zusammenhängenden Flächen, die von Funktionen erzeugt werden, welche als Träger eines der drei schlichten Normalgebiete (Einheitskreis, punktierte Ebene, Vollebene) haben, wobei im Fall des Einheitskreises als Träger die Funktion auf keinen Teilbogen des Einheitskreises stetig fortsetzbar sei (so daß also kein JORDAN-Bogen ein Randstück der Fläche bildet).

Zur sprachlichen Vereinfachung will ich die Windungspunkte und Randstellen einer RIEMANNschen Fläche unter den umfassenden Begriff *Singu-*

[2]) HANCK [2], TEICHMÜLLER [7].

laritäten der Fläche unterordnen. Endlich-vielblättrige Windungspunkte sind algebraische Singularitäten; alle übrigen Singularitäten sind transzendent, sie sind insbesondere also keine (inneren) Punkte der Fläche.

§ 4. Ich betrachte am Anfang die topologische Abbildung einfach zusammenhängender RIEMANNscher Flächen, deren Singularitäten nur über einer geschlossenen doppelpunktfreien JORDAN-Kurve L liegen, in die schlichte Ebene (§ 5). Von dort ergeben sich die charakteristischen Eigenschaften des Streckenkomplexes S^*, welche der axiomatischen Einführung des Begriffes zugrunde liegen (§§ 6—9); ebenso wird man auf die Vorschrift geführt, die über die Zuordnung von Streckenkomplex $S^*(W)$ und RIEMANNscher Fläche W zu geben sind (§ 10). Danach wende ich mich der Frage zu, welche Gestalt ein Streckenkomplex S^* haben muß, damit er eine einfach zusammenhängende Fläche darstellt (§ 11); hier wird sich eine notwendige und hinreichende Bedingung ergeben (Satz 1). Eine topologische Abbildung einer im Streckenkomplex dargestellten RIEMANNschen Fläche (§ 12) erlaubt, ein genaues Entsprechen von Randstellen der Fläche und gewissen Strukturen des Streckenkomplexes zu erkennen (§§ 13—19, Sätze 2, 3). Zum Schluß werde ich ein paar typische Beispiele von Flächen geben, die sich nun im Streckenkomplex darstellen lassen (§ 20), und den erweiterten Streckenkomplexbegriff dem bisherigen gegenüberstellen (§ 21).

Konstruktion des Streckenkomplexes und seine Eigenschaften

§ 5. Gegeben sei eine einfach zusammenhängende RIEMANNsche Fläche W als Überlagerung der w-Ebene; ihre sämtlichen Singularitäten mögen über einer geschlossenen doppelpunktfreien JORDAN-Kurve L liegen, so daß also in jedem Punkt P über $p \notin L$ entweder $w-p$ oder w^{-1} Ortsuniformisierende ist. Es werde ferner angenommen, daß in keinem Blatt der Fläche ein Teilbogen von L die Fläche berande. Ausstanzen über L zerlegt W in Halbblätter, die auf W über gewisse Teilbogen von L hinweg zusammenhängen. Sie werden als *Innengebiete* bzw. *Außengebiete* bezeichnet, je nachdem sie zur Linken oder zur Rechten liegen, wenn L in bestimmtem Sinn orientiert wird. Wird W durch konforme Abbildung $z(w)$ in das schlichte Normalgebiet — die Vollebene, die punktierte Ebene $z \neq \infty$ oder den Einheitskreis $|z|<1$ — übergeführt, so erhält man in den Bildern der Halbblätter eine aus Kurvenpolygonen, den *Elementarpolygonen*, gebildete Figur F, die die Verheftung der Halbblätter widerspiegelt. Jede mit F topologisch äquivalente Figur in der Ebene wird als *Netz* N der Fläche W bezeichnet; N entsteht aus W durch eine gewisse topologische Abbildung $h(w)$, umgekehrt W aus N durch die eindeutige Funktion $h^{-1}(z)$. Die Gesamtheit der Randpunkte der Figur F bzw. des topologischen Bildes N heißt der *Rand* des Netzes; die Bilder der über L liegenden Kurven heißen *Netzkurven* oder *Netzlinien*, sie sind Berandungslinien der Elementarpolygone. Ist die Fläche W nicht-kompakt — ist also das schlichte Normalgebiet die punktierte Ebene oder der Einheitskreis — und wird F als Netz gewählt, so ist natürlich der Punkt $z=\infty$ bzw.

die Kreislinie $|z|=1$ der Rand des Netzes. Der Schnittpunkt P von n Netzlinien ($2 \leq n < \infty$) ist vermittels $h(w)$ Bild eines algebraischen Windungspunktes, in dem n Blätter zusammenhängen; in P treffen $2n$ Elementarpolygone zusammen, solche Punkte nennen wir *Eckpunkte* des Netzes. Ist $N=F$, so ist P ein Kreuzungspunkt der zu $z(w)$ inversen meromorphen Funktion $w(z)$, die die Fläche W erzeugt. Ein keinen Eckpunkt im Innern enthaltendes Stück s einer Netzkurve zwischen zwei Eckpunkten, einem Eckpunkt und dem Rand, oder zwischen Randpunkten des Netzes nennen wir eine *Seite* des Netzes. Ist $N=F$, so ist s Bild eines offenen Regularitätsbogens von $z(w)$. Zwei Elementarpolygone heißen *benachbart*, wenn sie eine Netzseite gemeinsam haben.

Eine Folge von Punkten lauter verschiedener Netzseiten häuft sich nur gegen den Rand des Netzes; wir drücken dies kurz so aus: *Die Seiten des Netzes häufen sich nur gegen seinen Rand.* Zum Beweis dieser topologischen Behauptung darf $N=F$ angenommen werden. Es sei z_0 ein Häufungspunkt von Punkten aus lauter verschiedenen Netzseiten. Dann gibt es entweder eine Folge z_ν von Eckpunkten des Netzes [also von Kreuzungspunkten der Funktion $w(z)$] der Art, daß $\lim z_\nu = z_0$ — in diesem Fall ist z_0 wegen $w'(z_\nu)=0$ kein innerer Punkt des schlichten Normalgebietes F — oder es gibt ganze abgeschlossene Stücke l_ν auf Netzseiten s_ν, so daß ebenfalls $z_\nu \in l_\nu$ und $\lim z_\nu = z_0$, während Eckpunkte am Ende der Seiten s_ν den Punkt z_0 nicht als Häufungspunkt haben — aber auch diese Annahme schließt aus, daß z_0 ein innerer Punkt von F sei, denn eine (hinreichend kleine) Umgebung eines solchen enthält höchstens von endlich vielen Netzseiten Stücke.

§ 6. Die Verheftung der Halbblätter überträgt sich auf das Aneinanderstoßen der Elementarpolygone im Netz und kann in folgender Weise durch einen *Streckenkomplex* dargestellt werden: In jedem Elementargebiet wird ein Punkt, *Knoten*, markiert, mit einem Ring in den Bildern von Innengebieten, mit einem Kreuz in den Bildern von Außengebieten. Wie die Netzseiten häufen sich die Knoten nur gegen den Rand des Netzes. Jeder Ring wird mit den Kreuzen in den benachbarten Elementarpolygonen, jedes Kreuz mit den benachbarten Ringen durch JORDAN-Bögen, *Glieder*, in der Weise verbunden, daß

(1 a) *jede Netzseite genau einmal (in einem inneren Punkt) geschnitten wird,*

(1 b) *außer in den Ringen und Kreuzen keine Überschneidungen der Glieder auftreten.*

In einem Knoten laufen k Glieder zusammen, wenn k die Anzahl der (Netz-) Seiten am Rand des Elementarpolygons ist, in dem der Knoten liegt; es ist $k \geq 2$, weil kein Teilbogen von L die Fläche W berandet, k kann jedoch unendlich sein. Die nach (1 a), (1 b) erzeugte Figur $S^*(W)$ heißt *Streckenkomplex* der Fläche W[3]).

[3]) Im Gegensatz zum Streckenkomplex S kommen im Streckenkomplex S^* keine Mehrfachbindungen vor: zwei Knoten sind nicht durch benachbarte Glieder verbunden.

Mitunter ist es zweckmäßig, bei der Konstruktion des Streckenkomplexes die Bedingung (1a) zu verschärfen: Jedem im Sinn der Orientierung auf L von a nach b durchlaufenen offenen Teilbogen $I(a, b)$ werde ein Punkt $l(a, b) \in I(a, b)$ so zugeordnet, daß $l(a, b)$ in beiden Argumenten stetig ist und daß mit $c \in I(a, b)$ auch $l(a, c) \in I\{a, l(a, b)\}$ und $l(c, b) \in I\{l(a, b), b\}$; dies bedeutet eine gewisse Monotonieeigenschaft der Funktion $l(a, b)$ in beiden Argumenten. Diese Zuordnung ist möglich: Ist L' die Kreislinie $|w| = 1$, orientiert in Richtung wachsenden Arguments, so wähle man mit $0 < \psi - \varphi < 2\pi$ einfach $l(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}$ und übertrage die Zuordnung durch topologische Abbildung auf die gegebene Kurve L. Eine Verschärfung von (1a) ist die zu (1a) zusätzliche Forderung

(1a') *Eine Netzseite, die vermittels $h(w)$ Bild des Teilbogens $I(a, b) \subset L$ ist, werde vom Glied des Streckenkomplexes im Punkt $h\{l(a, b)\}$ geschnitten.*

§ 7. Aus (1a), (1b) folgt, daß ein innerer Punkt eines Gliedes nie Häufungspunkt von Punkten anderer Glieder ist. Es folgt insbesondere, daß Häufungsmengen von Gliedern JORDAN-Bögen bilden, die ohne eine Netzseite zu treffen von Knoten aus zum Rand des Netzes führen und, eventuell von Knoten abgesehen, im Innern des Netzes keine gemeinsamen Punkte haben. [Man bilde ein Elementarpolygon mit unendlich vielen Seiten topologisch ab auf einen Kreis, in dem die Bilder der Glieder auf Radien liegen.] Wir nennen diese JORDAN-Bögen *Strahlen* des Streckenkomplexes S^*. Jeder Strahl liegt also in einem wohlbestimmten Elementarpolygon, und die Menge der Strahlen ist nirgends dicht.

Diejenigen keinen Knoten im Inneren enthaltenden Teilgebiete der Ebene, in die die Glieder und die Strahlen des Streckenkomplexes S^* das Netz zerlegen, heißen *Elementargebiete*[4]; die Glieder und Strahlen am Rand eines Elementargebietes heißen seine *Seiten*, die am Rand liegenden Knoten seine *Eckknoten*. Weil jeder Strahl einen Knoten mit dem Rand des Netzes verbindet, können höchstens zwei Strahlen ein Elementargebiet beranden; ein Elementargebiet, das genau einen Strahl als Seite besitzt, hat unendlich viele Seiten, weil die Gliederfolge seines Randes gegen den Netzrand streben muß; ein Elementargebiet mit zwei verschiedenen Strahlen als Seiten hat dagegen nur endlich viele Seiten, weil die Knoten, die zu den beiden Strahlen gehören, über eine endliche Zahl von Gliedern miteinander verbunden sind. Ein Elementargebiet mit zwei Strahlen am Rand nennen wir *Strahl-Elementargebiet*. Die Elementargebiete, deren Rand eine endliche — und somit gerade — Anzahl $2n$ von *Gliedern* bildet, entsprechen den Eckpunkten des Netzes, also den n-blättrigen algebraischen Windungspunkten der Fläche W; danach heißen sie *algebraische Elementargebiete*[5]. [Es ist stets $n \geqq 2$, weil für $n = 1$ ja auf W keine Singularität vorliegt, also kein Eckpunkt des Netzes entstehen kann; vgl. Fußnote [3]).] Die Koordinate a des einem algebraischen Elementargebiet

[4]) Elementargebiete können Randpunkte des Netzes am Rand enthalten.

[5]) Ein endlich-vielseitiges Elementargebiet im Streckenkomplex S^* ist nicht notwendig ein algebraisches Elementargebiet.

entsprechenden algebraischen Windungspunktes auf W heißt *Koordinate* des Elementargebietes; dem Elementargebiet ist die komplexe Zahl *a zugeordnet.* Ein Elementargebiet mit unendlich vielen Seiten werde in Anlehnung an die Terminologie, wie sie im Zusammenhang des Streckenkomplexes S üblich ist, *logarithmisches Elementargebiet* genannt[6]; es hat mit dem Rand des Netzes (wenigstens) einen Randpunkt gemeinsam, weil die Netzseiten sich nicht im Innern des Netzes häufen; ebenso hat trivialerweise ein Strahl-Elementargebiet mit dem Rand des Netzes einen Randpunkt gemeinsam. Ein logarithmisches Elementargebiet bedeckt ein Gebiet der z-Ebene, in dem alle Netzlinien, ein Strahl-Elementargebiet bedeckt ein Gebiet, in dem überhaupt alle Wege, die zum Rand des Netzes laufen, für $h^{-1}(z)$ Zielwege mit demselben Zielwert sind. Der Zielwert a ist in allen Halbblättern, deren Knoten Eckknoten des (logarithmischen oder Strahl-) Elementargebietes sind, eine Singularität der Fläche W, und natürlich eine transzendente; das Elementargebiet ist dieser transzendenten Singularität zugeordnet, wie ein algebraisches Elementargebiet einer algebraischen Singularität der Fläche zugeordnet ist. Die Zahl a heißt *Koordinate* des (logarithmischen oder Strahl-) Elementargebietes; sie ist ihm *zugeordnet.* Ein Strahl-Elementargebiet hat zwei Strahlen des Streckenkomplexes als Seiten, jeder ist einer Häufungsstelle von Singularitäten am Rand eines Halbblattes zugeordnet; eine kleine Überlegung zeigt, daß die Koordinaten beider Häufungsstellen gleich sind[7]).

Jedem Glied des Streckenkomplexes, das einen Ring mit einem Kreuz verbindet, entspricht ein bestimmter Teilbogen von L, über den die den beiden Knoten zugehörigen Halbblätter verheftet sind; weil von jedem Knoten wenigstens zwei Glieder ausgehen, trennt jedes Glied zwei Elementargebiete, und zwar die beiden, die den beiden Singularitäten am Ende des Teilbogens zugeordnet sind. Zwei Glieder, die beim Umlauf um einen Knoten unmittelbar aufeinander folgen, heißen *benachbart*; ebenso heißen zwei Elementargebiete, die durch ein Glied getrennt werden, benachbart. Die Glieder des Streckenkomplexes S^* können sich, wie wir sahen — anders als die Seiten des Netzes — im Innern des Netzes auf Strahlen häufen; dies tritt genau dann ein, wenn die RIEMANNsche Fläche W Halbblätter enthält, auf deren Rand unendlich viele Singularitäten liegen. Den Häufungspunkten der Singularitäten entsprechen Häufungsmengen von Gliedern und somit von Elementargebieten.

§ 8. Wir schließen im folgenden den im wesentlichen bekannten Fall aus, die RIEMANNsche Fläche W enthalte nur endlich viele Blätter; sie würde als schlichtartige Fläche nur über endlich vielen Punkten verzweigt sein, also schon durch den Streckenkomplex S darstellbar sein. *Wir nehmen ferner an,*

[6]) Im Gegensatz zu den Verhältnissen beim Streckenkomplex S braucht einem logarithmischen Elementargebiet im Streckenkomplex S^* als Singularität kein logarithmischer Windungspunkt zuzugehören; auch kann ein Strahl Seite eines logarithmischen Elementargebietes sein.

[7]) Im § 19 werden wir sehen, daß beide Häufungsstellen dieselbe Randstelle definieren.

der unendlich ferne Punkt U der z-Ebene sei der einzige Randpunkt des Netzes; dies läßt sich durch topologische Abbildung stets erreichen.

§ 9. Der Streckenkomplex S^* hat nun offenbar folgende Eigenschaften:

1°. *Die Anzahl der Knoten ist abzählbar unendlich und der Punkt U ist der einzige Häufungspunkt der Knoten.*

2°. *Jedes Glied verbindet einen Ring mit einem Kreuz.*

3°. *Verschiedene Glieder haben außer den Knoten keine gemeinsamen Punkte.*

4°. *Der Streckenkomplex ist zusammenhängend: zwei Knoten sind stets über eine Gliederfolge verbunden.*

5°. *Zwei Knoten sind nicht durch benachbarte Glieder verbunden*[8]).

6°. *Von jedem Knoten gehen mindestens zwei Glieder aus.*

7°. *Kein von einem Knoten verschiedener Punkt eines Gliedes ist Häufungspunkt von Punkten anderer Glieder.* Es folgte

a) *jedes Glied trennt zwei Elementargebiete;*

b) *Häufungsmengen von Gliedern liegen nur auf punktfremden* JORDAN-*Kurven, den Strahlen, die von einem Knoten aus zum Punkt U führen.*

8°. *Jedem Elementargebiet E_ν ist eine komplexe Zahl a_ν zugeordnet.*

9°. *Zwei benachbarten Elementargebieten sind verschiedene Zahlen zugeordnet.*

10°. *Wird ein Ring R genau einmal in positivem Sinn umlaufen, so folgen die den Elementargebieten mit dem Eckknoten R zugeordneten Zahlen in solcher Weise aufeinander, daß die Kurve L genau einmal im Sinn der Orientierung durchlaufen wird; dasselbe gilt beim Umlauf um ein Kreuz in negativem Sinn.*

11°. *Jedem Strahl σ_γ ist eine komplexe Zahl a_γ zugeordnet, nämlich der Grenzwert der Zahlen, die den sich dort häufenden Elementargebieten zugeordnet sind.* [Denn eine Häufungsmenge der Glieder ist auch eine Häufungsmenge von Elementargebieten, und der Grenzwert der Zahlen, die einer gegen σ_γ konvergierenden Folge von Elementargebieten zugeordnet sind, existiert und ist unabhängig von der Folge (vgl. die Ordnungseigenschaft 10°).]

12°. *Der zur Zahl a_ν* bzw. *a_γ gehörige Punkt der Zahlenebene liegt auf einer geschlossenen doppelpunktfreien* JORDAN-*Kurve L.*

13°. *Ein innerer Punkt G^μ eines Gliedes g_ν^μ, das ein Elementargebiet E_ν berandet, kann mit einem inneren Punkt T_ν von E_ν falls E_ν algebraisches, mit dem Randpunkt ∞ von E_ν falls E_ν nicht algebraisches Elementargebiet ist*[9]), *so durch einen — bis eventuell auf den Endpunkt — in E_ν verlaufenden* JORDAN-*Bogen s_ν^μ verbunden werden, daß die Gesamtheit der Bögen s_ν^μ bis auf die Punkte G^μ, T_ν punktfremd sind und sich nicht im Endlichen häufen*[10]).

Die einem Elementargebiet bzw. einem Strahl zugeordnete komplexe Zahl heißt *Koordinate* des Elementargebietes bzw. des Strahles. Der einfacheren

---

[8]) Vgl. Fußnote [3]).

[9]) Nach 1°, 7°b ist im letzten Fall U ein Randpunkt des Elementargebietes, nach 4° hat es nur einen Randpunkt bei U.

[10]) Wir sagen: Ein Punkt P ist *Häufungspunkt* einer unendlichen Menge von JORDAN-Bögen (Gebieten), wenn es eine Folge von Punkten aus lauter verschiedenen JORDAN-Bögen (Gebieten) gibt, die den Punkt P als Häufungspunkt hat.

Sprechweise wegen bezeichnen wir im folgenden die Elementargebiete und ihre Häufungsmengen einfach auch mit den zugehörigen Koordinaten.

Die Eigenschaften 1° bis 13° sind charakteristisch für den Streckenkomplex S^* einer einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche[11]).

Zuordnung der RIEMANNschen Fläche zum Streckenkomplex

§ 10. Es sei nämlich eine orientierte geschlossene doppelpunktfreie JORDAN-Kurve L gegeben, die die Ebene in zwei Gebiete, die Halbblätter, zerlegt, sowie ein Streckenkomplex S^*, der die Bedingungen 1° bis 13° erfüllt. Wir ordnen ihm eine RIEMANNsche Fläche W in der folgenden Weise zu:

Jedem Ring wird das bei positiver Durchlaufung von L links liegende Gebiet, das *Innengebiet*, jedem Kreuz das rechts liegende, das *Außengebiet*, zugeordnet; sind zwei Knoten durch ein Glied verbunden, das die Elementargebiete a_i, a_k trennt (cf. 7°a, 8°), so werden die zugehörigen Halbblätter — es sind nach 2° ein Innen- und ein Außengebiet — über demjenigen Teilbogen s_{ik} $[= I(a_i, a_k)$ bzw. $I(a_k, a_i)$ nach § 6] von L zwischen a_i, a_k (cf. 12°) verheftet, dessen Durchlaufung dem Überschreiten des Gliedes (cf. 10°) entspricht; es ist $a_i \neq a_k$ (cf. 9°). Wir nennen den Bogen s_{ik} *verheftenden* Teilbogen.

Auf diese Weise ist dem Streckenkomplex S^* eine zusammenhängende (cf. 4°) offene zweidimensionale Mannigfaltigkeit W zugeordnet, die eine RIEMANNsche Fläche ist: denn in einem Punkt P über der endlichen Koordinate a (bzw. der Koordinate ∞) in einem Innen- oder Außengebiet oder auf einem verheftenden Teilbogen ist $w - a$ (bzw. w^{-1}) Ortsuniformisierende; ein Endpunkt P eines verheftenden Teilbogens werde genau dann zur Fläche hinzugenommen, wenn er zu einem algebraischen Elementargebiet gehört. Nach 2° wird ein solches Elementargebiet von einer geraden Zahl $2n$ von Gliedern berandet [$n \geqq 2$ (cf. 5°)], ein n-maliger Umlauf um P führt also ins ursprüngliche Halbblatt zurück. Hat P die endliche Koordinate a (bzw. die Koordinate ∞), so ist $(w-a)^{1/n}$ (bzw. $w^{-1/n}$) Ortsuniformisierende in P. P ist also ein algebraischer Windungspunkt, in dem $n \geqq 2$ Blätter zusammenhängen. Die Nachbarrelation zwischen Ortsuniformisierenden, deren Definitionsgebiete einen nicht leeren Durchschnitt haben, ist offenbar direkt konform.

Logarithmische Elementargebiete, Strahl-Elementargebiete und Strahlen fassen wir unter den Begriff *Randelement* des Streckenkomplexes S^*[12]); einem Randelement ist zwar formal eine komplexe Zahl a zugeordnet (nach 8° oder 11°), ihm entspricht aber kein (innerer) Punkt der Fläche W, sondern eine *Randstelle* von W über a[13]).

[11]) Die Eigenschaft 1° ist natürlich einfach eine Folge der Verabredung von § 8, die Eigenschaft 5° ist mehr formaler Natur, vgl. dazu § 21, Fußnote [23]). Die Anzahl der Elementargebiete ist abzählbar, denn jeder Knoten ist nach 7° Eckknoten von höchstens abzählbar vielen Elementargebieten. Die Anzahl der Strahlen kann dagegen überabzählbar sein.

[12]) Unter diesen Begriff fallen noch andere Elemente des Streckenkomplexes; vgl. dazu § 16.

[13]) Es ist dabei möglich, daß verschiedenen Randelementen von S^* dieselbe Randstelle von W entspricht. Genaueres in §§ 17—19.

§ 11. Es gilt nun der

Satz 1. *Erfüllt der Streckenkomplex die Bedingungen* 1° *bis* 13°, *so ist die zugeordnete* RIEMANNsche *Fläche* W *(schlichtartig) und einfach zusammenhängend. Umgekehrt hat jede unendlich-vielblättrige einfach zusammenhängende* RIEMANNsche *Fläche, die nur über einer geschlossen doppelpunktfreien* JORDAN-*Kurve* L *Singularitäten trägt und von keinem Teilbogen von* L *berandet wird, einen Streckenkomplex* S^*, *der die Bedingungen* 1° *bis* 13° *erfüllt.*

Der zweite Teil des Satzes ist das bereits in § 9 gewonnenes Ergebnis. Zum Beweis des ersten Teiles weisen wir zunächst nach, daß jeder Rückkehrschnitt die Fläche W zerlegt, daß W also schlichtartig ist. Der einfache Zusammenhang von W folgt dann daraus, daß einer der beiden Teile, in die ein Rückkehrschnitt die Fläche zerlegt, kompakt ist[14]). Auf eine topologische Deformation des Rückkehrschnittes kommt es hierbei nicht an[15]).

Wir bilden jeden Knoten K_n von S^* ab auf einen bestimmten *festen* inneren Punkt P_i bzw. P_a des zugeordneten Innen- bzw. Außengebietes, und jedes Glied zwischen zwei Knoten topologisch ab auf eine Kurve, die nach Wahl einer Funktion $l(a, b)$ die beiden in den zugehörigen Halbblättern ausgezeichneten Punkte P_i, P_a über den inneren Punkt $l(a, b)$ des verheftenden Teilbogens $I(a, b)$ miteinander verbindet [cf. § 6] und mit diesem nur den Punkt $l(a, b)$ gemein hat. Die Abbildung der Glieder geschehe in der Weise, daß die Projektionen zweier solcher Bildkurven in die w-Ebene genau dann zusammenfallen, wenn sie den verheftenden Teilbogen über demselben Punkt von L treffen, während sie sonst nur zwei Punkte, nämlich P_i und P_a, gemeinsam haben. So erhalten wir im Streckenkomplex S^* das topologische Bild eines gewissen Kurvenzuges auf W.

Sei $\mathfrak{r}$ ein Rückkehrschnitt auf W. Er ist kompakt und kann als Polygonzug angenommen werden. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{r}$ nur durch endlich viele Halbblätter läuft. Die Annahme nämlich, $\mathfrak{r}$ liefe durch unendlich viele, würde erlauben, in jedem dieser Halbblätter H_ν genau einen Punkt w_ν von $\mathfrak{r}$ zu markieren. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{r}$ muß die Punktfolge w_ν einen Häufungspunkt P der Koordinate p auf W haben. In der Umgebung von P würden unendlich viele Blätter zusammenhängen, andererseits ist (mit ganzzahligem n) entweder $(w-p)^{1/n}$ oder $w^{-1/n}$ Ortsuniformisierende in P, eine hinreichend kleine Umgebung von P enthält also Punkte aus höchstens n Blättern. Aus dem Widerspruch folgt: die Annahme oben war irrig.

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{r}$ die Fläche W zerlegt. Es kann abgesehen werden von dem Fall, daß $\mathfrak{r}$ durch einen Windungspunkt hindurchläuft. [Dann kann nämlich $\mathfrak{r}$ in der Umgebung des Windungspunktes in eine Kurve topologisch deformiert werden, die den Windungspunkt in geeigneter Weise umschlingt[15]).] Wir dürfen aber sogar annehmen, daß $\mathfrak{r}$ eine *einfache Folge* H_ν von Halbblättern, d.h. jedes nur einmal, durchläuft, also daß der Durchschnitt von $\mathfrak{r}$ mit H_ν zusammenhängend ist. Um dies einzusehen, stellen wir $\mathfrak{r}$ in Parameterform

[14]) Der Beweis schließt sich Gedankengängen von ELFVING [1], S. 11f., an

[15]) Zur topologischen Deformation von Wegen s. z. B. NEVANLINNA [6], S. 59.

als $\mathfrak{r}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, dar; die Punkte $\mathfrak{r}(0)$ und $\mathfrak{r}(1)$ und nur diese fallen zusammen. Nehmen wir an, es gebe im Intervall $(0, 1)$ zwei Zahlen t', t'' $(t' < t'')$, so daß $\mathfrak{r}(t') \in H_\nu$, $\mathfrak{r}(t'') \in H_\nu$, $\mathfrak{r}(0) \notin H_\nu$ aber $\mathfrak{r}(t^*) \notin H_\nu$, wo $t' < t^* < t''$, so verbinden wir $\mathfrak{r}(t')$ mit $\mathfrak{r}(t'')$ durch eine in H_ν verlaufende doppelpunktfreie *Querkurve* $\bar{\mathfrak{r}}(t)$, $t' \leq t \leq t''$, die mit $\mathfrak{r}$ nur die Punkte $\mathfrak{r}(t') = \bar{\mathfrak{r}}(t')$ und $\mathfrak{r}(t'') = \bar{\mathfrak{r}}(t'')$ gemein hat. $\mathfrak{r}(t)$ und $\bar{\mathfrak{r}}(t)$ bestimmen zusammen zwei verschiedene Rückkehrschnitte, die nur dann beide die Fläche zerlegen, wenn $\mathfrak{r}$ schon diese Eigenschaft hatte.

Weiter dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{r}$ nicht über ein und denselben verheftenden Teilbogen b_ν in das Halbblatt H_ν eintritt und es verläßt, denn in diesem Fall bildet ein Teilbogen von b_ν eine Querkurve, die $\mathfrak{r}$ in zwei Teile zerlegt, von denen einer, nämlich der in und am Rand von H_ν verlaufende, die Fläche gewiß zerlegt. Als geschlossene Kurve, die eine einfache Folge von Halbblättern durchläuft und einen verheftenden Teilbogen nicht zweimal trifft, ist $\mathfrak{r}$ topologisch äquivalent entweder mit einem in einem einzigen Halbblatt liegenden Kreis — dann zerlegt $\mathfrak{r}$ gewiß die Fläche — oder mit dem Bild einer endlich viele Knoten genau einmal treffenden geschlossenen doppelpunktfreien (cf. 3°) Kurve $\mathfrak{s}$ aus Gliedern von S^*, in der jedes überhaupt durchlaufene Glied genau einmal in bestimmter Richtung durchlaufen wird. Jede doppelpunktfreie Kurve $\bar{\mathfrak{s}}$ aus Gliedern von S^*, die zwischen zwei verschiedenen Knoten von $\mathfrak{s}$ verläuft, und bis auf diese ihre Endpunkte innerhalb des von $\mathfrak{s}$ eingeschlossenen Gebietes G, hat als Bild auf W eine Querkurve $\bar{\mathfrak{r}}$ von $\mathfrak{r}$; $\mathfrak{s}$ umschließt als Urbild einer Kurve, die nur endlich viele Halbblätter trifft, endlich viele algebraische Elementargebiete (cf. 1°), es gibt daher nur endlich viele Gliedzugkurven $\bar{\mathfrak{s}}$ der betrachteten Art. Die Zerlegung von $\mathfrak{s}$ durch, bis eventuell auf die Endpunkte, ganz innerhalb G verlaufende Gliedzugkurven $\bar{\mathfrak{s}}$ führt schließlich auf die Ränder von endlich vielen algebraischen Elementargebieten. Nun ist eine Gliedzugkurve $\mathfrak{s}^*$, die ein $2n$-eckiges algebraisches Elementargebiet umschließt, offenbar auf eine Kurve $\mathfrak{r}^*$ auf W abgebildet, die einen n-blättrigen Windungspunkt einmal umschlingt; eine solche Kurve zerlegt die Fläche. Es zerlegt also auch $\mathfrak{r}$ die Fläche W; damit ist die Schlichtartigkeit von W bewiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß von den zwei Teilen W_1, W_2, in die $\mathfrak{r}$ die Fläche W zerlegt, der eine kompakt ist. Dies ist offenbar gewiß dann der Fall, wenn $\mathfrak{r}$ eine Kurve $\mathfrak{r}^*$ ist, die einen algebraischen Windungspunkt einmal umschlingt, oder eine Kurve, die in *einem* Halbblatt verläuft. Im allgemeinen Fall dürfen wir wieder annehmen, $\mathfrak{r}$ durchlaufe eine einfache Folge von Halbblättern und trete ein in ein Halbblatt und verlasse es nicht über denselben verheftenden Teilbogen, denn die beiden Rückkehrschnitte, die durch $\mathfrak{r}$ und eine Querkurve $\bar{\mathfrak{r}}$ bestimmt werden, umschließen nur dann beide kompakte Teilstücke von W, wenn $\mathfrak{r}$ schon diese Eigenschaft hat. Wir betrachten die zu $\mathfrak{r}$ topologisch äquivalente Gliedzugkurve $\mathfrak{s}$ und die Gesamtheit der oben eingeführten Gliedzugkurven $\bar{\mathfrak{s}}$, die das Gebiet G in endlich viele algebraische Elementargebiete zerlegen. Seien S_1, S_2 zwei Punkte auf diesen Gliedzugkurven, die nicht auf $\mathfrak{s}$ liegen. Die zugehörigen Bildpunkte R_1, R_2 auf W werden durch $\mathfrak{r}$ nicht getrennt: S_1, S_2 sind ja durch Teile von Gliedzugkurven

verbunden, die $\mathfrak{r}$ nicht überschreiten. Demnach liegen die Bilder aller nicht auf $\mathfrak{z}$ liegenden Punkte der Kurven $\bar{\mathfrak{s}}$ in ein und demselben der beiden Teilgebiete, in die $\mathfrak{r}$ die Fläche W zerlegt, etwa in W_1. W_1 wird selbst durch die Bilder $\bar{\mathfrak{r}}$ der Kurven $\bar{\mathfrak{s}}$ in endlich viele Teilgebiete zerlegt, die nach Hinzunahme der Punkte auf den Kurven $\bar{\mathfrak{r}}$ sämtlich kompakte Teilflächenstücke von W sind, denn sie sind abgeschlossene Umgebungen algebraischer Windungspunkte. Es ist also auch W_1 kompakt; damit ist der einfache Zusammenhang von W bewiesen.

§ 12. Vom Streckenkomplex S^* gelangen wir zum Netz N von W in der folgenden Weise. In jedem Elementargebiet E_ν der Koordinate a_ν, das am Rand m Glieder g_ν^μ $(1 \leqq m \leqq \infty)$ besitzt, wird ein Punkt T_ν markiert — seine Lage wird später genauer festgelegt —; von ihm aus werden in E_ν m JORDAN-Kurven s_ν^μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ gezogen, und zwar werde jedes Randglied g_ν^μ von E_ν durch genau eine solche Kurve s_ν^μ mit T_ν verbunden; zwei verschiedene Kurven mögen, außer eventuell T_ν, im Innern von E_ν keine gemeinsamen Punkte haben. In dem Punkt T_ν treffen sich m solche Kurven, wir nennen ihn einen *Treffpunkt* der *Koordinate* a_ν; die Kurven s_ν^μ nennen wir *Treffkurven* oder *Trefflinien* (es wird sich zeigen, daß die Kurven s_ν^μ nach der näheren Bestimmung im folgenden Absatz die Netzkurven eines Netzes von W bilden, so daß also die Treffpunkte in den algebraischen Elementargebieten die Eckpunkte des Netzes sind). Jedes Glied trennt zwei Elementargebiete, es enden auf ihm also zwei Treffkurven; beide mögen das Glied im selben inneren Punkt treffen, die Vereinigung beider nennen wir eine *Treffseite*. T_ν sei, falls E_ν ein algebraisches Elementargebiet, ein innerer Punkt von E_ν; falls E_ν ein logarithmisches Elementargebiet oder ein Strahl-Elementargebiet ist, sei T_ν der (erreichbare) Randpunkt U von E_ν (cf. 13°). Eine Treffkurve hat offenbar mit keinem Strahl des Streckenkomplexes endliche Punkte gemeinsam. Wir wählen ferner (nach 13°) die Treffkurven so, daß sie keinen endlichen Häufungspunkt haben und insbesondere also keinen endlichen Punkt eines Strahles zum Häufungspunkt haben.

Eine Treffseite s, die zwei Treffpunkte in Elementargebieten (der Koordinaten) a_i, a_k verbindet, werde durch eine topologische Funktion $f(z)$ auf denjenigen Teilbogen von L zwischen a_i, a_k abgebildet, dessen Durchlaufung dem Überschreiten des von s getroffenen Gliedes nach 10° entspricht.

Wir nennen ein von Treffkurven berandetes (eventuell erst im Unendlichen) geschlossenes Polygon ein *Elementarpolygon*, wenn keine Treffkurve in seinem Inneren liegt[16]). Jedes Elementarpolygon Q_k enthält in seinem Inneren einen Knoten K_k; es kann topologisch auf das Halbblatt H_k abgebildet werden, das von K_k repräsentiert wird, in einer Weise, daß die Singularitäten am Ende der verheftenden Teilbogen von H_k in die am Rand von Q_k liegenden Treffpunkte derselben Koordinate abgebildet werden. Die Abbildungsfunktion ist bei geeigneter Wahl eine Fortsetzung von $f(z)$ — wir bezeichnen sie ebenfalls durch $f(z)$ —, denn die Singularitäten von H_k liegen über den Koordinaten der

[16]) Elementarpolygone können den Punkt U zum mehrfachen Randpunkt haben; die Struktur eines Elementarpolygons in der Umgebung von U kann sehr kompliziert sein.

Treffpunkte am Rand von Q_k und über den Häufungspunkten dieser Koordinaten. Die topologischen Bilder der algebraischen Singularitäten am Rand von H_k sind gerade die Treffpunkte $T_r \neq U$ am Rand von Q_k, alle anderen Singularitäten werden in U abgebildet. Eine Treffseite s am Rand von Q_k zwischen zwei Treffpunkten enthält keinen Treffpunkt im Inneren; sie ist topologisches Bild desjenigen singularitätenfreien Teilbogens über L, über den H_k mit $H_m = f(Q_m)$ zusammenhängt, wenn K_m der Innenknoten des Elementarpolygons Q_m ist, den man von K_k aus erreicht, indem man das von s geschnittene Glied des Streckenkomplexes durchläuft: Die beiden Elementarpolygone Q_k, Q_m stoßen also genau längs derjenigen Treffseite zusammen, über deren topologisches Bild die zugeordneten Halbblätter verheftet sind. Die aus den Elementarpolygonen gebildete Figur ist also ein Netz der Fläche W. Wir haben so eine topologische Abbildung der Fläche W in die punktierte Ebene $|z| < \infty$, vermittelt durch $f^{-1}(w) = h(w)$, die Umkehrung von $f(z)$. Die Konstruktion des Netzes, die eine topologische Abbildung von W auf die punktierte Ebene darstellt, zeigt wieder die Schlichtartigkeit und den einfachen Zusammenhang von W. Sie hat außerdem noch besondere Bedeutung für die Behandlung von Randstellenproblemen im folgenden Abschnitt.

Die Randstellen

§ 13. Wie ist nun die Verteilung der Randstellen bei einer im Streckenkomplex dargestellten einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche?

Jeder Zielweg $\mathfrak{a}$ einer analytischen Funktion $w(z)$ mit dem Zielwert a definiert eine Randstelle[17]) der erzeugten RIEMANNschen Fläche W über dem Zielwert a — um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, sei hier und bei den späteren Untersuchungen dieses Abschnitts stets $a \neq \infty$ angenommen. Zwei verschiedene Zielwege $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ mit demselben Zielwert a definieren dann und nur dann dieselbe Randstelle der Fläche, wenn es möglich ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ einen die beiden Zielwege verbindenden dritten Weg $\mathfrak{c}_\varepsilon$ zu finden, auf dem $|w(z) - a| < \varepsilon$ bleibt. $\mathfrak{c}_\varepsilon$ nennen wir eine *ε-Verbindung* oder einen *ε-Verbindungsweg* der beiden Zielwege. Die Gesamtheit der Stellen auf der Fläche, deren Urbilder durch eine ε-Verbindung mit dem Zielweg $\mathfrak{a}$ verbunden werden können, heißt eine *ε-Umgebung* U_ε der durch den Zielweg definierten Randstelle. U_ε ist eine Überlagerung der Kreisscheibe $|w - a| < \varepsilon$. Bekannt ist die folgende (unvollständige) Klassifikation[17]): Eine Randstelle heißt *unmittelbar*, wenn für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ „in keinem Blatt von U_ε ein innerer Punkt über $w = a$ liegt", d.h. wenn die Spurpunkte von U_ε schon in der punktierten Kreisscheibe $0 < |w - a| < \varepsilon$ liegen; eine Randstelle heißt *mittelbar*, wenn für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ „in jedem Blatt von U_ε ein innerer Punkt über $w = a$ liegt", d.h. für die von uns betrachteten Flächen, die nur über einer geschlossenen doppelpunktfreien JORDAN-Kurve L Singularitäten tragen: wenn jeder Weg, der von einem beliebigen nicht über L liegenden Punkt $P \in U_\varepsilon$ aus gegen die Koordinate a strebt ohne L ander-

[17]) Vgl. IVERSEN [3], ULLRICH [8].

weitig zu treffen, über a einen inneren Punkt findet. Es gibt Randstellen, die weder mittelbar noch unmittelbar sind.

Bei topologischer Abbildung des Definitionsgebietes der Funktion $w(z)$ geht ein Zielweg in einen Zielweg über, zwei Zielwege, die durch eine ε-Verbindung verbunden werden können, gehen in ebensolche über. Daher kann bei der Erklärung der Begriffe „Zielweg", „Randstelle" an Stelle der ein analytisches Bild erzeugenden Funktion $w(z)$ die ein topologisches Bild erzeugende Funktion $f(z)$ ebenso verwendet werden. Ebensowenig ändert eine topologische Abbildung der w-Ebene, die die Kurve L in eine vorgegebene Kurve L' mit denselben Eigenschaften deformiert, etwas am Zielwertcharakter eines Weges oder daran, daß zwei Wege gleiche oder verschiedene Randstellen definieren.

§ 14. Zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen dem Streckenkomplex S^* einer RIEMANNschen Fläche W und ihren Randstellen sei daher der Einfachheit halber angenommen, L sei die reelle Achse, orientiert in Richtung wachsenden Realteiles $\Re(w)$; das durch $f(z)$ vermittelte Bild eines die obere bzw. die untere Halbebene repräsentierenden Knotens sei der Punkt $w=i$ bzw. $w=-i$; einem Glied $g(a, b)$, dessen Überschreiten dem Durchlaufen der reellen Achse in Richtung der Orientierung von a nach b entspricht, ordne $f(z)$ das durch die drei Punkte i, $l(a, b)$, $-i$ bestimmte Orthokreisbogenstück $k(a, b)$ zur reellen Achse zu, welches die Endpunkte $i, -i$ hat und die reelle Achse im Punkt $l(a, b)$ schneidet [vgl. (1a')]. Das Netz werde nach § 12 so zum Streckenkomplex S^* konstruiert, daß die Konfiguration Netz-Streckenkomplex die Bedingungen (1a), (1a'), (1b) erfüllt. Dies ist möglich, denn die Bedingung (1a'), die als einzige durch die Konstruktion nicht schon von selbst erfüllt ist, bedeutet nur, daß der Schnittpunkt der Netzseite mit einem Glied $g(a, b)$ durch $f(z)$ über die Koordinate $l(a, b)$ abgebildet wird.

Aus (1a') und aus den Eigenschaften der Funktion $l(a, b)$ erhält man nach einer kleinen Überlegung drei Lemmen.

Lemma 1. *Jeder Zielweg, der in einem logarithmischen Elementargebiet oder in einem Strahl-Elementargebiet der Koordinate a verläuft, hat den Zielwert a.*

Lemma 2. *Stoßen zwei logarithmische Elementargebiete längs einer unendlichen Gliederfolge aneinander, so ist ein Weg, der diese Gliederfolge immer wieder trifft, kein Zielweg.*

Lemma 3. *a) Jeder Weg, der in einem Strahl-Elementargebiet zum Punkt U läuft, ist Zielweg mit der Koordinate des Elementargebietes als Zielwert; b) für zwei verschiedene derartige Zielwege gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine ε-Verbindung.*

§ 15. Sei gegeben ein Zielweg $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(t)$, $0\leq t<\infty$, im Netz. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, er sei doppelpunktfrei, treffe keinen Knoten im Netz und sein Zielwert sei Null; von einer Stelle ab trifft er entweder überhaupt kein Glied von S^* mehr, oder er trifft immer wieder Glieder. Im ersten Fall liegt er entweder auf einem Strahl — dem Zielweg entspricht also ein Strahl σ des Streckenkomplexes — oder $\mathfrak{a}$ liegt

in einem logarithmischen Elementargebiet oder einem Strahl-Elementargebiet (einschließlich des Randes) [denn algebraische Elementargebiete reichen nicht bis zum Rand des Netzes] der Koordinate Null (Lemma 1). Im zweiten Fall durchläuft $\mathfrak{a}$ von jeder Stelle an noch unendlich viele verschiedene Elementargebiete (wobei dasselbe Elementargebiet unendlich oft getroffen werden kann). [Es ist nämlich unmöglich, daß $\mathfrak{a}$ nur eine (von Eins verschiedene) endliche Anzahl n von Elementargebieten immer wieder trifft: Weil $\mathfrak{a}$ zum Rand des Netzes läuft, scheiden algebraische Elementargebiete, wegen der endlichen Anzahl Strahl-Elementargebiete aus, während man nach Lemma 2 logarithmische Elementargebiete ausschließt]. Wir dürfen annehmen, $\mathfrak{a}$ habe dann weder mit Gliedern noch mit Strahlen des Streckenkomplexes ein Kontinuum gemeinsam. Sei nun a_α die Koordinate des Elementargebietes E_α aus der von $\mathfrak{a}$ durchlaufenen Folge $\{E_\alpha\}$ von Elementargebieten. Vom Zielweg mehrfach getroffene Elementargebiete kommen in der Folge $\{E_\alpha\}$ entsprechend oft vor.

Die nach der Reihenfolge der Durchlaufung geordnete Folge $\{E_\alpha\}$ braucht nicht den Ordnungstypus ω der Folge der natürlichen Zahlen zu haben. Ordnet man jedem Elementargebiet $E_\alpha \in \{E_\alpha\}$ den Parameterwert t_α eines Punktes von $\mathfrak{a}$ innerhalb E_α zu, so erhält man eine zu $\{E_\alpha\}$ ähnliche geordnete, nirgends dichte Menge $\{t_\alpha\}$ in $0 \leq t < \infty$; jedem Häufungspunkt t' der Folge $\{t_\alpha\}$ entspricht eine Häufungsmenge $E_{t'}$ von $\{E_\alpha\}$, also ein Strahl σ des Streckenkomplexes. Die Gesamtheit $\{\bar{E}_\alpha\}$ aus den Elementargebieten E_α und ihren Häufungsmengen bildet also eine nach wachsendem Parameter t geordnete Menge; wir nennen $\alpha = t_\alpha$ die *Indexzahl* eines Elementargebietes oder Strahles in der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$. Die Menge $\{\alpha\}$ der Indexzahlen der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ ist auf der Zahlengeraden abgeschlossen und nirgends dicht.

In $\{\bar{E}_\alpha\}$ kommen entweder unendlich viele nur logarithmische, oder endlich viele logarithmische und unendlich viele algebraische, oder unendlich viele logarithmische und unendlich viele algebraische Elementargebiete noch von jeder Stelle des Zielweges ab vor. Es sei $\{E_{\alpha_\nu}\}$ $\nu = 1, 2, \ldots$, eine abzählbar unendliche Teilfolge verschiedener Elementargebiete von $\{E_\alpha\}$ derart, daß $\lim \alpha_\nu = \infty$. Entweder gibt es in $\{E_\alpha\}$ eine Unterfolge $\{E_{\alpha_\nu}\}$, die gegen einen Strahl konvergiert, oder jede Unterfolge $\{E_{\alpha_\nu}\}$ hat als Häufungspunkt [18]) nur den Punkt U.

Jedes Elementargebiet E_α, von E_0 abgesehen, hat als Nachbarn in der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ entweder zwei andere Elementargebiete, oder ein Elementargebiet und einen Strahl, oder zwei Strahlen. Es sei E_α ein Elementargebiet, das als rechten (linken), also späteren (früheren) Nachbarn in der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ ein Elementargebiet E_{α^*} hat; e_α sei eine Netzseite, die die Treffpunkte T_α, T_{α^*} der Elementargebiete E_α, E_{α^*} verbindet. Es gilt dann

Lemma 4. *Ist $a = 0$ der Zielwert des Zielweges $\mathfrak{a}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl t_ε derart, daß für jedes Elementargebiet $E_\alpha \in \{E_\alpha\}$, das einen Nachbarn E_{α^*} in der Folge $\{E_\alpha\}$ hat, mit $\alpha > t_\varepsilon$ (wenigstens) eine Netzseite e_α ein topologisches Bild $f(e_\alpha)$ besitzt, das ganz über der Scheibe $|w| < \varepsilon$ liegt.*

[18]) Vgl. Fußnote [10]).

Korollar 1. *Es ist* $|a_\alpha| < \varepsilon$, $|a_{\alpha^*}| < \varepsilon$.

Korollar 2. *Für die Koordinate a' eines vom Zielweg für $t > t_\varepsilon$ getroffenen Strahls σ' oder eines Strahl-Elementargebietes E' gilt* $|a'| \leqq \varepsilon$.

Korollar 3. *Ein Strahl, der Häufungsmenge der unendliche Folge $\{E_{\alpha_\nu}\}$ von Elementargebieten ist, die ein Zielweg vom Zielwert Null durchläuft, hat die Koordinate Null.*

Lemma 4 ist eine einfache Konsequenz der beiden folgenden Hilfssätze; Korollar 1 ist trivial, die Korollare 2, 3 folgen sofort aus dem Lemma zusammen mit dem Korollar 1.

Hilfssatz 1. *Ein Glied, dessen Überschreiten der Durchlaufung des Intervalles $I(a'a'')$ auf L von a' nach a'' im Sinn der Orientierung entspricht, wird durch $f(z)$ auf einen Weg über der w-Ebene abgebildet, auf dem* $|w| \geqq \min\{l(a', a''), 1\}$ *ist.*

Der Hilfssatz ist eine triviale Folge aus der Definition der Abbildung $f(z)$.

Hilfssatz 2. *Sei $\mathfrak{z}$ ein Weg, der zwei verschiedenen Seiten g', g'' eines Elementargebietes E der Koordinate a verbindet, während das Elementargebiet E' der Koordinate a' durch g' von E getrennt werde, und entweder das Elementargebiet E'' der Koordinate a'' durch g'' von E getrennt werde oder g'' ein Strahl der Koordinate a'' $[= a]$ sei. Sei $\mathfrak{w}$ das durch die topologische Abbildung $f(z)$ gewonnene Bild des Weges $\mathfrak{z}$. Dann ist*

$$\max_{w \in \mathfrak{w}} |w| = \max_{z \in \mathfrak{z}} |f(z)| \geqq \operatorname{Min}(|a|, |a'|, |a''|, 1). \tag{2}$$

Beweis. Es sei zunächst g'' ein Glied des Streckenkomplexes. Die Ungleichung (2) ist trivial, wenn $\mathfrak{z}$ durch den Treffpunkt von E läuft. Andernfalls unterscheiden wir zwei Fälle. a) Die Vereinigung der beiden durch g', g'' bestimmten abgeschlossenen Teilbogen von L hat den Punkt a als inneren Punkt. Wir dürfen annehmen, die Koordinaten der Elementargebiete folgen in der Reihe a', a, a'' im Sinn der Orientierung von L aufeinander. Jeder Weg $f(\mathfrak{z})$, den einen Punkt von $k(a', a)$ mit einem Punkt von $k(a, a'')$ verbindet, genügt der Relation $\max_{z \in \mathfrak{z}} |f(z)| \geqq \operatorname{Min}(|a|, \operatorname{Max}(|a'|, |a''|), 1)$, also auch der Relation (2). b) Die beiden durch g', g'' bestimmten Teilbogen von L haben den Punkt a als Randpunkt. $\mathfrak{z}$ schneidet dann eine Netzseite, die ein Intervall (a, a_0) der reellen Achse bestimmt, das mit dem Intervall (a', a) keinen inneren Punkt gemein hat. Ähnlich wie oben folgt

$$\max_{z \in \mathfrak{z}} |f(z)| \geqq \operatorname{Min}(|a|, \operatorname{Max}(|a'|, |a_0|), 1),$$

und hieraus (2). Läßt man das Intervall (a, a'') sich auf den Punkt a zusammenziehen, erhält man in der Grenze den Hilfssatz für den Fall, daß g'' kein Glied, sondern ein Strahl des Streckenkomplexes ist.

Aus dem Hilfssatz 2 folgt nun für drei unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente $E_{\alpha^*}, E_\alpha, E_{\alpha^{**}}$ der Folge $\{E_\alpha\}$ mit $\alpha^* < \alpha < \alpha^{**}$, wo E_α ein Elementargebiet, $E_{\alpha^*}, E_{\alpha^{**}}$ entweder zwei Elementargebiete, oder ein Elementargebiet

und ein Strahl sind, sogleich $\lim_{\alpha\to\infty} \mathrm{Min}(|a_\alpha|, |a_{\alpha^*}|, |a_{\alpha^{**}}|) = 0$; aus Hilfssatz 1 folgt dann nach $\lim a_\alpha = \lim a_{\alpha^*} = \lim a_{\alpha^{**}} = 0$ das Lemma 4.

§ 16. Wir erhalten als Ergebnis: Nur folgenden Elementen von S^* können Randstellen von W entsprechen:

a) einem logarithmischen Elementargebiet oder einem Strahl-Elementargebiet,

b) einem Strahl,

c) einer Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ von Elementargebieten und Strahlen (nicht notwendig vom Ordnungstypus ω), in der die Indexzahlen eine abgeschlossene dichte Zahlmenge $0 \leqq \alpha < \infty$ mit $\lim \alpha = \infty$ durchlaufen, wenn

(c 1) jede Teilfolge $E_{\alpha_\nu} \in \{\overline{E}_\alpha\}$ verschiedener Elementargebiete vom Ordnungstypus ω, die Elementargebiete beliebig hoher Indexzahl enthält, gegen den Punkt U konvergiert,

(c 2) zwei verschiedene Elementargebiete oder Strahlen $\overline{E}_{\alpha'}, \overline{E}_{\alpha''} \in \{\overline{E}_\alpha\}$ durch einen JORDAN-Bogen verbunden werden können, der die zwischen $E_{\alpha'}, E_{\alpha''}$ liegenden Elementargebiete und Strahlen der Folge der Reihe nach, und sonst keine weiteren, durchläuft und insbesondere den Punkt U nicht enthält,

(c 3) es für je zwei in der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ benachbarte Elementargebiete E_α, E_{α^*} Netzseiten e_α gibt, die die Treffpunkte der Elementargebiete verbinden, so daß die Projektionen der Bilder $f(e_\alpha)$ gegen einen Punkt konvergieren [cf. Lemma 4].

Diese drei Gruppen a), b), c) von Elementen des Streckenkomplexes nennen wir *Randelemente* des Streckenkomplexes und bezeichnen sie der Reihe nach als *Gebiets-Randelement, Strahl-Randelement, Punkt-Randelement (Gebiets-Element, Strahl-Element, Punkt-Element);* die Konvergenzkoordinate aus (c 3) heiße *Koordinate* des Punkt-Randelements.

Wir sagen, ein Zielweg $\mathfrak{a}$ *definiert* ein Gebiets-Randelement, wenn er von einer Stelle ab in einem Gebiets-Randelement, also in einem logarithmischen Elementargebiet oder einem Strahl-Elementargebiet liegt; $\mathfrak{a}$ definiert ein Strahl-Randelement σ der Koordinate a, wenn $\mathfrak{a}$ entweder schließlich im Elementarpolygon des Strahl-Randelementes (cf. 7° b) läuft und den Zielwert a hat, oder wenn $\mathfrak{a}$ eine Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$, $0 \leqq \alpha < \infty$ von Elementargebieten und Strahlen durchläuft, in der eine Unterfolge $\{E_{\alpha_\nu}\}$ vom Typ ω mit $\lim \alpha_\nu = \infty$ sich gegen σ häuft. Der Zielweg $\mathfrak{a}$ definiert ein Punkt-Randelement, wenn eine Teilfolge $\{\overline{E}_{\alpha_\nu}\}$ mit $\lim \alpha_\nu = \infty$ der von $\mathfrak{a}$ durchlaufenen Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ von Elementargebieten und Strahlen auch Teilfolge einer ein Punkt-Randelement bestimmenden Folge $\{\overline{E}^*_{\alpha_\nu}\}$ ist.

Über den Zusammenhang zwischen den Rand-Elementen des Streckenkomplexes und Randstellen der zugeordneten RIEMANNschen Fläche gilt

Satz 2. *Jedem Randelement von S^* ist in eindeutiger Weise eine Randstelle zugeordnet.*

Der Satz besagt ein zweifaches: 1. Es gibt zu jedem Randelement einen Zielweg, der es definiert; 2. alle ein bestimmtes Randelement definierenden Zielwege definieren dieselbe Randstelle. Den Beweis des Satzes führen wir in diesen zwei Schritten.

§ 17. Jedem Randelement entspricht zunächst (wenigstens) eine Randstelle von W: Es gibt zu jedem Randelement einen dieses Element definierenden Weg, der Zielweg ist.

a) Ein Weg, der auf einer Netzseite zum Treffpunkt eines logarithmischen Elementargebietes der Koordinate a läuft, ist Zielweg mit dem Zielwert a; ebenso ist ein Weg, der in einem Strahl-Elementargebiet der Koordinate a zum Punkt U läuft, ein Zielweg mit dem Zielwert a.

b) Sei gegeben ein Strahlelement σ der Koordinate a. Zu ihm gehört (cf. 7°) ein wohlbestimmter Knoten K_a, der in einem Elementarpolygon Q_a liegt. Sei $\mathfrak{w}$ ein Weg im Halbblatt $H_a = f(Q_a)$, der gegen die Koordinate a strebt. Sein Urbild $f^{-1}(\mathfrak{w})$ strebt gegen U (cf. § 12), ist also ein Zielweg mit dem Zielwert a.

c) Gegeben sei ein Punktelement der Koordinate a, also eine Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ von Elementargebieten und Strahlen, die die Bedingungen (c1), (c2), (c3) erfüllt [$0 \leqq \alpha < \infty$, $\lim \alpha = \infty$, $\{\alpha\}$ nirgends dicht]; $\bar{a}_\alpha$ sei die Koordinate des Elementargebietes bzw. Strahles $\overline{E}_\alpha$. Wir dürfen $a = 0$ annehmen. Sei Σ_β die Gesamtheit der Strahlen in der Teilfolge $E^{(\beta)} = \{\overline{E}_\alpha\}_{\alpha > \beta}$ von $\{\overline{E}_\alpha\}$. Nach Bedingung (c1) ist $\bigcap_\beta \Sigma_\beta$ leer.

Ist Σ_β für ein gewisses β leer, so ist die Teilfolge $E^{(\beta)}$ eine Folge $\{E_n\}$ benachbarter Elementargebiete vom Typ ω, die Koordinate von E_n sei a_n. Sind alle Elementargebiete der Folge $\{E_n\}$ algebraisch, so ist nach (c3) die Folge $\{e_n\}$ der Netzseiten, die die Treffpunkte in aufeinanderfolgenden Elementargebieten verbinden, ein Zielweg. Enthält $\{E_n\}$ logarithmische Elementargebiete, so konstruieren wir einen Zielweg $\mathfrak{z}$ in folgender Weise. Wir nehmen an, $\mathfrak{z}$ sei schon bis zu dem Punkt $P_m \in E_m$ fortgesetzt. Ist E_m ein algebraisches Elementargebiet, so sei P_m der Treffpunkt von E_m; ist E_m ein logarithmisches Elementargebiet, so sei $P_m \in E_m$ ein Punkt einer Netzseite e_{m-1}, die die Treffpunkte T_{m-1} und T_m von E_{m-1} und E_m verbindet, mit $|f(P_m) - a_m| < 2^{-m}$. Wir betrachten die Netzseite e_m, die die Treffpunkte T_m und T_{m+1} von E_m und E_{m+1} verbindet. Ist E_m ein algebraisches Elementargebiet, so werde $\mathfrak{z}$ von P_m aus auf e_m nach P_{m+1} fortgesetzt. Ist E_m ein logarithmisches Elementargebiet, so betrachten wir auf e_m einen Punkt $Q_m \in E_m$, für den $|f(Q_m) - a_m| < 2^{-m}$. P_m und Q_m werden in E_m durch eine endliche Zahl von Netzkurven voneinander getrennt. Zwei benachbarte schneiden mit dem Rand von E_m aus E_m ein Gebiet heraus, dessen Bild den in der oberen oder den in der unteren Halbebene liegenden Teil der punktierten Scheibe $0 < |w - a_m| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ enthält. Es können daher P_m und Q_m durch einen Weg $\mathfrak{c}_m$ verbunden werden, dessen Bild die 2^{-m}-Umgebung der Koordinate a_m nicht verläßt. Ist E_m ein logarithmisches Elementargebiet, so werde $\mathfrak{z}$ von P_m aus auf $\mathfrak{c}_m$ und dem zwischen Q_m und P_{m+1} liegenden Teil von e_m nach P_{m+1}

fortgesetzt. In dieser Weise fortsetzend erhält man auf Grund von (c3) einen Zielweg mit dem Zielwert $a = \lim a_m \ (=0)$.

Ist dagegen Σ_β für kein β leer, so sei $\sigma_0 \in \Sigma_{\beta_0}$ ein beliebiger Strahl. Er definiert ein Halbblatt H_0. In H_0 gibt es nach der Ordnungseigenschaft von $\{\bar{E}_\alpha\}$ einen *letzten* Strahl $\sigma_0' \in \{\bar{E}_\alpha\}$, der insbesondere selbst höchstens einseitige Häufungsmenge anderer Strahlen, und zwar niedrigerer Indexzahlen, ist [man beachte, daß jeder Strahl in einem wohlbestimmten Elementarpolygon liegt]. Es gibt daher zwei andere Indexzahlen β_0', β_1 mit $\beta_0 < \beta_0' \leqq \beta_1$ derart, daß $\bigcup_{\beta_0'}^{\beta_1} \bar{E}_\alpha$ keinen Strahl enthält und daß ebenso zwischen σ_0' und $E_{\beta_0'}$ in der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ kein Strahl vorkommt. In $\Sigma_{\beta_0'}$ gibt es wieder einen ersten Strahl σ_1. Dieser definiert ein Halbblatt H_1, in diesem gibt es wieder einen letzten Strahl σ_1', usf. Auf diese Weise erhält man eine Folge H_ν von lauter verschiedenen Halbblättern und von ersten und letzten Strahlen σ_ν, σ_ν' in ihnen [$\sigma_\nu = \sigma_\nu'$ ist natürlich möglich]. Diese Folge kann nicht abbrechen, weil Σ_β für kein β leer ist, überdies haben die Strahlen σ_ν, σ_ν' in $\{\bar{E}_\alpha\}$ für hinreichend großes ν beliebig große Indexzahlen α [cf. (c2)]: Denn ein Weg, der sämtliche Strahlen σ_ν, σ_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots)$ trifft, konvergiert notwendig gegen den Punkt U, weil eine unendliche Menge von Strahlen, von denen höchstens zwei denselben Knoten bestimmen, außer dem Punkt U keinen Häufungspunkt hat [cf. § 12, Abs. 1, und (c2)].

Ein Zielweg, der das gegebene Punkt-Randelement $\{\bar{E}_\alpha\}$ der Koordinate 0 definiert, wird auf folgende Weise konstruiert. Zunächst streben die Koordinaten m_ν, m_ν' der Strahlen σ_ν, σ_ν' gegen Null [cf. (c3)]. Auf jedem Strahl σ_ν bzw. σ_ν' wird ein Punkt P_ν bzw. P_ν' markiert, für den $|f(P_\nu) - m_\nu| < 2^{-\nu}$ bzw. $|f(P_\nu') - m_\nu'| < 2^{-\nu}$. Von P_ν, P_ν' aus wird ein so kurzer JORDAN-Bogen $\mathfrak{z}_\nu$ bzw. $\mathfrak{z}_\nu'$ nach der Seite fallender bzw. wachsender Indexzahlen in den getroffenen Elementargebieten derart gezogen, daß nur Elementargebiete der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ [cf. (c2)] getroffen werden, insbesondere also kein weiterer Strahl, und daß ferner das Bild $f(\mathfrak{z}_\nu), f(\mathfrak{z}_\nu')$ im Kreis $|w - m_\nu| < 2^{-\nu}$ bzw. $|w - m_\nu'| < 2^{-\nu}$ enthalten ist; letzteres ist wegen der Stetigkeit von $f(z)$ möglich. Es ende $\mathfrak{z}_\nu$ bzw. $\mathfrak{z}_\nu'$ im Punkt $B_\nu \in E_{\beta_\nu}$ bzw. im Punkt $B_\nu' \in E_{\beta_\nu'}$ und es sei $\beta_\nu' \leqq \beta_{\nu+1}$. Man kann nun leicht einen Zielweg finden, der die Punkte $P_\nu, P_\nu', B_\nu', B_{\nu+1}, P_{\nu+1}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ verbindet: Man verbinde dazu P_ν mit P_ν' durch einen Weg $\mathfrak{p}_\nu$, dessen Bild ganz im Kreis $|w| < |m_\nu| + |m_\nu'| + 2^{-\nu}$ liegt; das ist möglich, denn $f(P_\nu), f(P_\nu')$ sind zwei Punkte in H_ν, die schon diese Bedingung erfüllen. Die Endpunkte $B_\nu', B_{\nu+1}$ der JORDAN-Bögen $\mathfrak{z}_\nu', \mathfrak{z}_{\nu+1}$ liegen in Elementargebieten $E_{\beta_\nu'}, E_{\beta_{\nu+1}}$, die entweder zusammenfallen oder in der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ durch endlich viele sich aneinanderschließende logarithmische und algebraische Elementargebiete getrennt sind, das Maximum der Beträge ihrer Koordinaten sei $m_{\nu,\nu+1}$. Im letzten Fall, oder wenn im ersten Fall $E_{\beta_\nu'} = E_{\beta_{\nu+1}}$ kein Strahl-Elementargebiet ist, können $B_\nu', B_{\nu+1}$ durch einen Weg $\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}$ verbunden werden, dessen Bild in $|w| \leqq |m_\nu| + |m_\nu'| + m_{\nu,\nu-1} + 2^{-\nu} + k_\nu$ (lim $k_\nu = 0$) enthalten ist [cf. (c2), (c3) und die für $\bigcap \Sigma_\beta = \emptyset$ besprochene Konstruktion]. Ist

aber $E_{\beta_\nu'} = E_{\beta_{\nu+1}}$ ein Strahl-Elementargebiet, so können B_ν', $B_{\nu+1}$ — wie eine kleine Überlegung unmittelbar zeigt — durch einen Weg $\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}$ mit derselben oben angegebenen Eigenschaft verbunden werden. Da nach (c3) auch $\lim m_{\nu,\nu+1} = 0$, ist der Weg $\bigcup_{\nu=0}^{\infty} \{\mathfrak{z}_\nu \cup \mathfrak{p}_\nu \cup \mathfrak{z}_\nu' \cup \mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}\}$ ein Zielweg mit dem Zielwert Null, der das Punkt-Randelement $\{\overline{E}_\alpha\}$ definiert.

§ 18. Allen drei Arten von Randelementen ist aber auch *nur eine* Randstelle von W zugeordnet. Für Strahl-Elementargebiete ist dies bereits in Lemma 3 ausgesagt. Für die übrigen Randelemente erkennen wir das auf folgende Weise. Zwei verschiedene Zielwege, die dasselbe Randelement definieren, haben (cf. Lemma 1 für logarithmische Elementargebiete, Lemma 4 mit Korollaren für Strahl- und Punkt-Randelemente) jedenfalls denselben Zielwert.

Seien zunächst in einem logarithmischen Elementargebiet E der Koordinate $a \neq \infty$ zwei Zielwege $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ gegeben. $\mathfrak{a}$ sei, wie wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, eine Netzkurve. Eine ähnliche Überlegung, wie sie in § 17c) Abs. 2 angestellt wurde, um zu zeigen, daß die Punkte P_m, Q_m in einem logarithmischen Elementargebiet E_m durch eine Kurve verbunden werden können, auf deren Bild $|w - a_m| < 2^{-m}$ bleibt, ergibt, daß jeder Punkt $P \in \mathfrak{a}'$ mit $|f(P) - a| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ durch eine im Elementargebiet E verlaufende ε-Verbindung $\mathfrak{c}_\varepsilon$ mit dem Weg $\mathfrak{a}$ verbunden werden kann; beide Zielwege definieren also dieselbe Randstelle. Die Randstelle ist genau dann ein *logarithmischer Windungspunkt*, wenn die Koordinaten der Nachbargebiete von E im Streckenkomplex die Zahl a nicht zum Häufungspunkt haben. Dann und nur dann ist nämlich für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ das Netzbild der ε-Umgebung der Randstelle, die durch E bestimmt ist, ganz in E enthalten und — mit $a = 0$ — ein Zweig von $\log w$ eine in der ε-Umgebung der Randstelle eindeutige und einwertige Funktion.

Ein Strahl-Randelement σ der Koordinate $a \neq \infty$ definiert zunächst eindeutig den Knoten K, von dem aus es nach U läuft. Sei $\mathfrak{a}$ ein σ definierender Zielweg, der in dem Elementarpolygon Q verläuft, das K enthält, und sei ein weiterer Zielweg $\mathfrak{a}'$ gegeben. Entweder verläuft $\mathfrak{a}'$ schließlich ebenfalls in Q — dann definiert $\mathfrak{a}'$ trivialerweise dieselbe Randstelle wie $\mathfrak{a}$ — oder $\mathfrak{a}'$ durchläuft (unter anderen) eine Folge $\{E_n^*\}$ von logarithmischen und algebraischen Elementargebieten der Koordinaten a_n^*, die alle K als Eckknoten haben und gegen σ konvergieren, während von jeder Stelle ab $\mathfrak{a}'$ noch unendlich viele Elementargebiete der Folge $\{E_n^*\}$ trifft. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir dürfen annehmen, m sei so groß, daß für die Koordinate a_m^* von $E_m^* \in \{E_n^*\}$ die Ungleichung $|a_m^* - a| < \frac{\varepsilon}{4}$ gilt, und daß für einen Punkt $P_m \in E_m^*$ von $\mathfrak{a}'$ gilt $|f(P_m) - a| < \frac{\varepsilon}{4}$, also $|f(P_m) - a_m^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ist E_m^* ein algebraisches Elementargebiet, zu dem der algebraische Windungspunkt A_m^* auf W gehört, so ist auf der Geraden $\mathfrak{g}_m = \overline{f(P_m) A_m^*}$ offenbar $|w - a| \leq |w - a_m^*| + |a_m^* - a| < \varepsilon$. Der am Rand von

$f(Q)$ liegende Punkt A_m^* kann offenbar mit $f(\mathfrak{a})$ in $f(Q)$ durch einen Weg $\mathfrak{w}_m$ verbunden werden, dessen Projektion sich von der Koordinate a um weniger als ε entfernt. Das Urbild von $\mathfrak{w}_m \cup \mathfrak{g}_m$ ist dann eine ε-Verbindung beider Zielwege. Ist E_m^* ein logarithmisches Elementargebiet, so kann (cf. § 17) P_m mit einem Punkt $Q_m \in E_m^*$ am Rand von Q durch eine Kurve verbunden werden, auf der $|w - a_m^*| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $|w - a| < \varepsilon$ bleibt. Zwischen Q_m und $\mathfrak{a}$ kann wie oben eine ε-Verbindung gefunden werden; die Zielwege $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ definieren also dieselbe Randstelle. Ganz ähnlich sieht man ein, daß zwei Zielwege, die dasselbe Punkt-Randelement definieren, auch dieselbe Randstelle definieren, denn beide haben von jeder Stelle ab immer wieder Elementargebiete gemein, in deren Bildern sich die Bilder der Zielwege schließlich beliebig nahekommen. Satz 2 ist somit bewiesen.

§ 19. Bisher haben wir gefunden, daß jedem Randelement des Streckenkomplexes in eindeutiger Weise eine Randstelle der dargestellten RIEMANNschen Fläche entspricht. Um den Zusammenhang zwischen Randelementen und Randstellen völlig zu klären, muß folgende Frage beantwortet werden: *Wann gehört zu zwei verschiedenen Randelementen R_1, R_2 dieselbe Randstelle der Fläche?* [Beide Randelemente müssen natürlich dieselbe Koordinate haben.] Auskunft hierüber gibt

Satz 3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei Randelemente R_1, R_2 der Koordinate $a \neq \infty$ dieselbe Randstelle über a bestimmen, ist, daß sie für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ von Elementargebieten und Strahlen verbunden sind, die folgende Bedingungen erfüllen.*

(B_1) *Für jedes z auf einer (geeigneten) Netzseite, die die Treffpunkte von algebraischen oder logarithmischen Elementargebieten verbinden, die Nachbarn in der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ sind, ist $|f(z) - a| < \varepsilon$.*

(B_2) *Die Koordinaten $\bar{a}_\alpha(\varepsilon)$ der Elemente der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ unterscheiden sich dem Betrag nach um höchstens ε von der Zahl a.*

Die Randelemente R_1, R_2 heißen *verbunden durch $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$*, wenn

(V_1) die Indexzahlen α eine abgeschlossene nirgends dichte Zahlmenge $0 \leq \alpha \leq 1$ bilden;

(V_2) das erste Element $\overline{E}_0(\varepsilon)$ der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ ein Elementargebiet des Randelementes R_1 oder, falls R_1 ein Strahl σ_1 ist, dieser Strahl ist, das letzte Element $\overline{E}_1(\varepsilon)$ der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ ein Elementargebiet des Randelementes R_2 oder, falls R_2 ein Strahl σ_2 ist, dieser Strahl ist;

(V_3) die Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ die Bedingung (c 2) aus § 16 erfüllt.

Ein Elementargebiet eines Gebiets-Randelementes ist hierbei nur das logarithmische Elementargebiet bzw. das Strahl-Elementargebiet selbst, ein Elementargebiet eines Strahl- oder Punkt-Randelementes ist ein Elementargebiet einer Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$, die das Randelement definiert. Strahl-Randelemente, die vom selben Knoten ausgehen und dieselbe Koordinate haben, bestimmen

danach[19]) — wie auch leicht direkt zu ersehen — dieselbe Randstelle. Aus Satz 3 folgt sofort [cf. Korollare 1, 2 von Lemma 4] als

Korollar. *Notwendig dafür, daß R_1, R_2 dieselbe Randstelle definieren, ist, daß R_1, R_2 sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ von Elementargebieten und Strahlen verbinden lassen, für deren Koordinaten $\bar{a}_\alpha(\varepsilon)$ die Beziehung $|\bar{a}_\alpha(\varepsilon) - a| < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Sind die zwei Randelemente R_1, R_2 ein logarithmisches Elementargebiet E_l und ein Strahl σ, der Seite von E_l ist, bzw. zwei Strahl-Elemente σ_1, σ_2, die beide Seiten eines Strahl-Elementargebietes E_s sind, dann definieren offenbar R_1, R_2 einerseits dieselbe Randstelle, andererseits erfüllen sie die Bedingungen $(B_1), (B_2)$ [es bilden $\{\sigma, E_l\} = \{\overline{E}_0, \overline{E}_1\}$ bzw. $\{\sigma_1, E_s, \sigma_2\} = \{\overline{E}_0, \overline{E}_{\frac{1}{2}}, \overline{E}_1\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$]; stehen R_1, R_2 in dieser speziellen Beziehung, gilt also Satz 3. Daß aber auch im allgemeinen die Bedingungen (B_1), (B_2) zunächst hinreichend sind, ist trivial nach den Konstruktionen des § 17, denn ähnliche Konstruktionen, wie diejenigen, die im § 17 einen ein Randelement definierenden Zielweg lieferten, liefern eine ε-Verbindung der beiden Zielwege, die R_1, R_2 definieren. Die Notwendigkeit von $(B_1), (B_2)$ erkennt man aus folgender Betrachtung, in der ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ angenommen sei.

Angenommen, die Randelemente R_1, R_2 definieren dieselbe Randstelle, während es für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ nicht möglich sei, R_1 und R_2 durch eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ mit den Eigenschaften $(B_1), (B_2)$ zu verbinden. Zunächst einmal ist die Bedingung (B_1) nur dann leer, wenn R_1, R_2 entweder ein Strahl σ und ein logarithmisches oder Strahl-Elementargebiet mit der Seite σ sind, oder wenn R_1, R_2 zwei Strahlen sind, die ein Strahl-Elementargebiet beranden, also in dem bereits erledigten Fall. In allen anderen Fällen ist die Bedingung (B_1) nicht leer, wir dürfen unter Benutzung von Hilfsatz 1 also annehmen, es gebe in jeder verbindenden Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ [also einer Folge, die $(V_1), (V_2), (V_3)$ erfüllt] wenigstens zwei in der Folge benachbarte Elementargebiete E', E'' mit der Eigenschaft

$(\overline{B})$ *jede Netzseite e', die die Treffpunkte T', T'' von E', E'' verbindet, hat ein Bild $f(e')$, das die ganze Strecke $M_1 \leqq \Re(w) \leqq M_2 (M_1 < M_2)$ der reellen Achse überdeckt.*

Die Annahme, es gebe dennoch eine ε-Verbindung der beiden Zielwege $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, die die Randelemente R_1, R_2 definieren, führt auf einen Widerspruch: Sei nämlich $\mathfrak{c}_\varepsilon$ eine ε-Verbindung der beiden Zielwege, die die Elementargebietsfolge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ definiert. Weil für $z \in \mathfrak{c}_\varepsilon$, insbesondere für den Schnittpunkt von $\mathfrak{c}_\varepsilon$ mit dem E', E'' trennenden Glied e', auch $|f(z)| < \varepsilon$ und weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen werden kann, muß mit $(\overline{B})$ nach Hilfssatz 1 dann $M_1 < 0 < M_2$ gelten. Über $(\overline{B})$ hinaus haben wir daher mit

$$M = \operatorname{Min}(-M_1, M_2):$$

$(\overline{B}^*)$ *$f(e')$ überdeckt die ganze Strecke $|\Re(w)| < M$, $M > 0$, der reellen Achse.*

[19]) Vgl. § 7, vorletzter Absatz, und Lemma 3.

Es ist insbesondere also $|a'| \geqq M$, $|a''| \geqq M$ mit a', a'' als Koordinaten von E', E''. Entweder hat wenigstens eines der Elementargebiete E', $E'' \in \{\bar{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ zwei Elementargebiete als Nachbarn in der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ (die auch übereinstimmen können), oder es sind E', E'' benachbarte logarithmische Elementargebiete, die beide je einen Strahl σ' bzw. σ'' am Rand besitzen, wobei jeder dieser Strahlen von $\mathfrak{c}_\varepsilon$ getroffen wird. Im ersten Fall habe etwa E' außer E'' noch ein Elementargebiet E der Koordinate a als Nachbarn in der Folge. Nach Hilfssatz 2 gilt für die Koordinate a von E die Ungleichung $|a| < \varepsilon$. Wegen $l(-M, 0) < 0$ und $l(0, M) > 0$ und der Stetigkeit und Monotonie der Funktion $l(a, b)$ in beiden Argumenten gibt es ein (kleines) positives ε_1, so daß $l(-M, u) < \gamma_1 < 0$ und $l(u, M) > \gamma_2 > 0$ für $|u| < \varepsilon_1$. Für den Schnittpunkt P von $\mathfrak{c}_\varepsilon$ mit dem E, E' trennenden Glied gilt also für $\varepsilon \leqq \varepsilon_1$ die Beziehung $|f(P)| > \operatorname{Min}(-\gamma_1, \gamma_2) = \gamma > 0$. Es gibt also auf dem Weg $\mathfrak{c}_\varepsilon$ Stellen, an denen $|f(z)| > \gamma > 0$. Wählt man $0 < \varepsilon < \operatorname{Min}(\varepsilon_1, \gamma)$, so ist im ersten Fall $\mathfrak{c}_\varepsilon$ gegen die Annahme keine ε-Verbindung der Zielwege $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$. Im zweiten Fall folgt ein Widerspruch daraus, daß für $z \in \sigma'$ bzw. $z \in \sigma''$ auch $|f(z)| > \operatorname{Min}(|a'|, |a''|, 1) > \varepsilon$ ist. Beide Zielwege definieren also verschiedene Randstellen über $w = 0$. Damit ist der Beweis von Satz 3 erbracht.

Beispiele

§ 20. Drei Beispiele mögen nun die bisherigen Ausführungen veranschaulichen.

a) $w_1(z) = z \sin z$ erzeugt eine RIEMANNsche Fläche W_1. Die algebraischen Singularitäten liegen über der reellen Achse, ihre Koordinaten sind die Funktionswerte von $w_1(z)$ in den (reellen) Nullstellen der Ableitung. Transzendente Singularitäten liegen nur über der Koordinate $w = \infty$, dem einzigen Zielwert von $w_1(z)$. Zur Konstruktion des Streckenkomplexes $S^*(W_1)$ kann als doppelpunktfreie geschlossene Zerschneidungskurve L die reelle Achse gewählt werden. Durch Bestimmung der reellen Züge von $w_1(z)$ erhält man ein Netz und hieraus den Streckenkomplex $S^*(W_1)$ der Fig. 1. $S^*(W_1)$ besteht aus einer Leiter von viereckigen algebraischen Elementargebieten, die nach beiden Seiten ins Unendliche führt; er ist bis auf die Koordinaten der algebraischen Windungspunkte gleich dem Streckenkomplex S der von $\sin z$ erzeugten Fläche, dem Sinus-Streckenkomplex, und hat, wie dieser, zwei logarithmische Elementargebiete der Koordinate ∞. $S^*(W_1)$ ist (einschließlich der Koordinaten der Elementargebiete) symmetrisch zum algebraischen Elementargebiet E_0 der Koordinate $a_0 = 0$. Das in der Leiter an n-ter Stelle auf E_0 folgende Elementargebiet sei E_n, seine Koordinate a_n hat das Vorzeichen von $(-1)^{n-1}$. Es wächst $(-1)^{n-1} a_n \sim n$ monoton gegen ∞. Nach Satz 3 bestimmen die beiden logarithmischen Elementargebiete der Koordinate ∞ nur eine einzige Randstelle über ∞, sie ist trivialerweise unmittelbar, weil W_1 über $w_1 = \infty$ überhaupt keinen (inneren) Punkt hat; sie ist aber kein logarithmischer Windungspunkt [§ 18, Abs. 2]. Die beiden in Fig. 1 nach links und rechts führenden Folgen viereckiger Elementargebiete bestimmen nach Satz 2

keine Randstelle, denn sie definieren kein Rand-Element: Die Bilder der Netzseiten, die zwei aufeinanderfolgende Treffpunkte verbinden, konvergieren nicht gegen einen Punkt (sondern sie streben sogar gegen die in $w_1 = \infty$ punktierte reelle Achse). Jede andere Folge von Elementargebieten, die ein Randelement von $S^*(W_1)$ definiert, enthält immer wieder eines der logarithmischen Elementargebiete, definiert also dieselbe Randstelle wie dieses. W_1 hat an Randstellen also nur eine einzige, und zwar eine unmittelbare, über $w_1 = \infty$.

b) $w_2(z) = z^{-1}\sin z$ erzeugt eine RIEMANNsche Fläche W_2. Wie bei W_1 liegen die algebraischen Singularitäten von W_2 nur über der reellen Achse, transzendente liegen nur über den Koordinaten $w_2 = 0, \infty$ den einzigen Zielwerten von $w_2(z)$. Wie oben erhält man den Streckenkomplex $S^*(W_2)$ in Fig. 2. $S^*(W_2)$ ist wieder bis auf die Koordinaten der algebraischen Elementargebiete der Sinus-Streckenkomplex. Wie $S^*(W_1)$ ist $S^*(W_2)$ symmetrisch

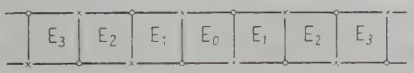

Fig. 1

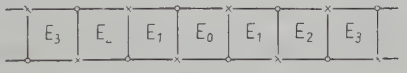

Fig. 2

zu einem Elementargebiet E_0; dessen Koordinate a_0 ist Eins. Für die Koordinate a_n des auf E_0 in der Leiter an n-ter Stelle folgende Elementargebiet gilt $(-1)^n \cdot a_n \sim n^{-1}$ monoton fallend. Die beiden von den logarithmischen Elementargebieten gebildeten Randelemente der Koordinate ∞ bestimmen (nach dem Korollar von Satz 3) zwei *verschiedene* Randstellen über $w_2 = \infty$, und zwar *logarithmische Windungspunkte* [§ 18, Abs. 2]. Die beiden Punkt-Randelemente, die von den in Fig. 2 nach links und rechts führenden Folgen viereckiger Elementargebiete gebildet werden, bestimmen (nach Satz 2) Randstellen über $w_2 = 0$, und zwar (nach Satz 3) zwei verschiedene; diese sind trivialerweise mittelbar, denn von jedem Punkt $P \in W_2$ gelangt man bei radialer Annäherung an die Koordinate Null zu einem Flächenpunkt über $w_2 = 0$, weil in keinem Halbblatt von W_2 über $w_2 = 0$ eine Singularität liegt. $S^*(W_2)$ hat offenbar keine weiteren Randelemente, W_2 also keine weiteren Randstellen.

c) $w(z) = e^z - z^{-1}$ erzeugt eine RIEMANNsche Fläche W_3. Die unendlich vielen Nullstellen von $w'(z) = e^z + z^{-2}$ sind alle einfach und nicht-reell; sie liegen sämtlich auf der durch $|e^z| = z^{-2}$ gegebenen Kurve C. Die in $\Im(z) > 0$ liegenden seien $z_1, z_2, \ldots$, der Reihe nach angeordnet, wie sie beim Durchlaufen des in $\Im(z) > 0$ liegenden Teiles C^+ von C, ausgehend vom Schnittpunkt mit der reellen Achse, getroffen werden. Es ist

$$w_\nu = w(z_\nu) = e^{z_\nu} - z_\nu^{-1} = -z_\nu^{-2} - z_\nu^{-1}.$$

Man berechnet leicht, daß sowohl der Realteil $\Re(w_\nu)$ als auch der Imaginärteil $\Im(w_\nu)$ eigentlich monoton in ν gegen Null fallen. Die transzendenten Singularitäten von W_3 liegen über den Zielwertkoordinaten $w = 0, \infty$ von $w(z)$. Durchläuft man C^+ in der nach $z = \infty$ weisenden Richtung, so ist $\Re(z)$ monoton fallend; auf dem in $\Im(z) > 0$, $\Re(z) < 0$ liegenden Teil von C^+ ist $\Re\{g(z)\}$,

mit $g(z) = -z^{-2} - z^{-1}$, monoton fallend. Ferner ist $\Re(z_1) > 0$, $\Re(z_2) < 0$; der zwischen z_2 und ∞ liegende Teil von C^+ wird durch $g(z)$ auf einen Kurvenbogen L_1 abgebildet. Sei L_2 das w_1, w_2 verbindende Geradenstück (das mit L_1 nur den Punkt w_2 gemeinsam hat), L_3 das Geradenstück $\Re(w) = \Re(w_1)$, $\Im(w_1) \leqq \Im(w) < \infty$ und seien $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$ die Spiegelungen von L_1, L_2, L_3 an der reellen Achse. Es ist dann

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \bar{L}_1 \cup \bar{L}_2 \cup \bar{L}_3$$

eine (stückweise analytische) doppelpunktfreie geschlossene Kurve, die durch alle Koordinaten von Singularitäten der Fläche W_3 hindurchgeht. Man erhält das Netz von W_3 in den Urbildern von L in der z-Ebene und aus ihm den Streckenkomplex $S^*(W_3)$ in Fig. 3. $S^*(W_3)$ besteht aus einer Folge F von Knoten und Gliedern, die ein logarithmisches Elementargebiet E der Koordinate ∞ begrenzt; ein Innenknoten F_0 der Folge ist außerdem über ein Glied s' mit einem Außenknoten K', dieser über ein Glied s'' mit einem Innenknoten K'' verbunden; K'' selbst ist mit allen Außenknoten der Folge F durch Glieder verbunden, er ist also Eckknoten einer unendlichen Folge $\{E_\nu\}$ ($\nu = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots$) von viereckigen Elementargebieten. $E_1, E_2, \ldots$ seien der Reihe nach die oberhalb der Glieder s', s'' liegenden Elementargebiete, $E_{-1}, E_{-2}, \ldots$ die unterhalb liegenden. Die Koordinate von E_ν ist w_ν für $\nu > 0$, $\overline{w}_\nu$ für $\nu < 0$. Es ist $\lim w_\nu = \lim \overline{w}_\nu = 0$.

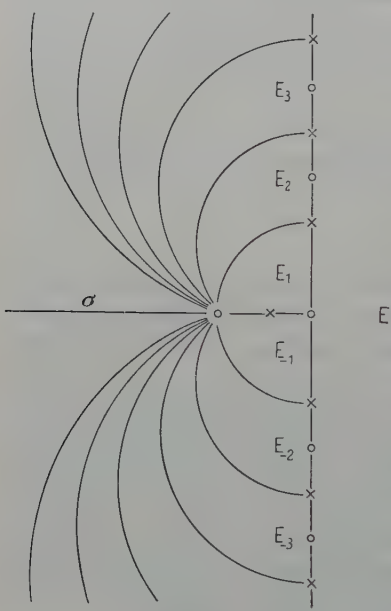

Fig. 3

$S^*(W_3)$ hat als Randelemente das logarithmische Elementargebiet E der Koordinate ∞ und ein Strahl-Randelement σ der Koordinate 0, das durch die Folge $\{E_\nu\}$ definiert wird. Ihnen entsprechen: eine Randstelle von W_3 über ∞ — die nach § 18 ein logarithmischer Windungspunkt, also eine unmittelbare Randstelle ist — und eine Randstelle über 0. Diese ist weder mittelbar noch unmittelbar: im Halbblatt H'', das zum Knoten K'' gehört, erreicht man von keinem Punkt aus bei Annäherung an die Koordinate 0 einen Flächenpunkt über 0; in allen anderen Halbblättern von W_3 hingegen liegen innere Punkte über der Koordinate 0.

Beziehungen zwischen den Streckenkomplexbegriffen

§ 21. Ist einer RIEMANNschen Fläche W ein Streckenkomplex S bzw. ein Streckenkomplex S^* zugeordnet, so wurde dieser mit $S(W)$ bzw. $S^*(W)$ bezeichnet. Trivialerweise umfaßt der Definitionsbereich $\mathfrak{S}^*$ des Funktionals S^*

den Definitionsbereich $\mathfrak{S}$ des Funktionals S. Ist $W \in \mathfrak{S}$, liegen also die Singularitäten von W über endlich vielen Grundpunkten, so erhält man $S^*(W)$ aus $S(W)$ dadurch, daß man in $S(W)$ alle zwischen zwei Knoten verlaufenden Bündel benachbarter Glieder durch ein einziges Glied ersetzt. Umgekehrt erhält man bei einer Fläche $W \in \mathfrak{S}$, deren Streckenkomplex $S^*(W)$ gegeben ist, $S(W)$ dadurch, daß man ein Glied, dessen Überschreiten dem Durchlaufen des Bogens s von L entspricht, durch ein Bündel von $k+1$ benachbarten Gliedern ersetzt, wenn k die Anzahl der Grundpunkte im Innern von s ist, über denen W überhaupt verzweigt ist[20]).

Erweiterungen in ähnlicher Richtung, wie sie in § 2 für den Streckenkomplex S erwähnt wurden, sind auch für S^* durchzuführen: Gegeben seien n einfach zusammenhängende Gebiete G_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in der Ebene, von denen jedes durch L in zwei Teilgebiete zerlegt wird, während zwei verschiedene Gebiete G_ν, G_μ höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Es sei $W \in \mathfrak{S}^*$ eine Fläche, die in jedem Blatt $B_\varkappa$ höchstens je eine Singularität $a_\nu^{(\varkappa)} \in G_\nu$ enthält. Jeder Fläche, die aus W dadurch hervorgeht, daß die Windungspunkte $a_\nu^{(\varkappa)}$ innerhalb G verschoben werden, werde als Streckenkomplex $S^*(W)$ zugeordnet. Auf Einzelheiten will ich hier jedoch nicht eingehen.

Literatur

[1] ELFVING, G.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. Fennicae, Nova Ser. **2**, Nr. 3, 1—60 (1934). — [2] HANCK, H.: Über die Ableitungsfestigkeit gewisser Verzweigungseigenschaften. Dissertation Göttingen **1935**. — [3] IVERSEN, F.: Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Thèse de Helsingfors **1914**. — [4] NEVANLINNA, R.: Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion. Verh. Internat. Math. Kongreß 1 Zürich 1932. — [5] NEVANLINNA, R.: Eindeutige Analytische Funktionen. Berlin: Springer 1936; 2. Aufl. 1953. — [6] NEVANLINNA, R.: Uniformisierung. Berlin: Springer 1953. — [7] TEICHMÜLLER, O.: Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung. Dtsch. Math. **4**, 163—190 (1939). — [8] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jber. Deutsch. Math. Verein. **46**, 232—274 (1936).

[20]) Man könnte natürlich auch beim Streckenkomplex S^* (wie man es beim Streckenkomplex S tut) Mehrfachbindungen zulassen, in der Weise, daß zweiseitigen Elementargebieten nicht-singuläre Stellen der Fläche über L zugeordnet sind.

Gießen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. September 1955)

Huckemann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 240—282 (1956)

Über den Einfluß von Randstellen Riemannscher Flächen auf die Wertverteilung*)

Herrn Rolf Nevanlinna zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

Friedrich Huckemann

Einleitung

Eine der wesentlichen Problemstellungen der modernen Funktionentheorie ist die Frage nach den gegenseitigen Beziehungen zwischen einer analytischen Funktion und der Riemannschen Fläche, die sie erzeugt. Insbesondere geht man von der Riemannschen Fläche als *primärer Gegebenheit* aus und fragt, wie ihr Verzweigungscharakter in der Wertverteilung der erzeugenden Funktion zum Ausdruck kommt. Es liegt in der Natur der Sache, daß die Randstellen der Fläche hier von entscheidendem Einfluß sind.

Die außerordentlich komplizierte Struktur von ganz allgemeinen Riemannschen Flächen brachte es mit sich, daß man sich zunächst nur mit einfachen Flächentypen beschäftigte. Insbesondere kam man dazu, die Klasse $\mathfrak{R}$ einfach zusammenhängender nicht-kompakter Flächen, die nur über endlich vielen Grundpunkten Windungspunkte tragen, zu studieren; dies liegt auch nahe, denn diese Flächen gestatten im Streckenkomplex eine übersichtliche Darstellung, was Untersuchungen natürlich bedeutend erleichtert, andererseits sind die Flächen doch so allgemein, daß eine Kenntnis der hier herrschenden Verhältnisse Fingerzeige und Anhaltspunkte dafür gibt, welche Aussagen man überhaupt erwarten darf über den Zusammenhang zwischen der geometrischen Struktur der Fläche und dem analytischen Verhalten der erzeugenden Funktion.

Die Flächen aus $\mathfrak{R}$ besitzen als Randstellen allerdings nur logarithmische Windungspunkte, eine gewiß nicht sehr allgemeine Art von Randstellen; es läßt sich jedoch eine wesentlich umfassendere Klasse $\mathfrak{L}$ von Riemannschen Flächen durch Streckenkomplexe darstellen, wenn man den Begriff des Streckenkomplexes allgemeiner faßt, als es bislang in der Regel geschehen ist[1]). Eine Fläche der Klasse $\mathfrak{L}$ kann nun weit allgemeinere Randstellen als logarithmische Windungspunkte tragen; als Beispiel mögen hier nur die mittelbaren Randstellen erwähnt werden, die bisher noch gar nicht syste-

*) Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert; ich sage dafür meinen Dank. Die Arbeit ist ein Teil der Habilitationsschrift des Verfassers, die der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus-Liebig-Hochschule in Gießen vorgelegen hat.

[1]) Huckemann [7]. Es gibt schon verschiedene Ansätze in dieser Richtung, die die vorliegende Arbeit gefördert haben. Vgl. hier auch Fußnote 2.

matisch von der geometrischen Seite her, ausgehend von der Flächenstruktur, behandelt und in ihrem Einfluß auf die Wertverteilung untersucht wurden. [Es liegt eine noch unveröffentlichte Untersuchung vor, die für die Lösungen linearer Differentialgleichungen die asymptotische Integration ausnutzt, um auf Flächenstruktur und Wertverteilung zu schließen[2]).] Unter den Flächen aus $\mathfrak{L}$ verdienen für unsere Zwecke besonders diejenigen hervorgehoben zu werden, deren (verallgemeinerter) Streckenkomplex aus endlich vielen periodischen Enden besteht, die einem Kernkomplex anhängen; entsprechend werden ja auch unter den Flächen aus $\mathfrak{R}$ im Zusammenhang mit Wertverteilungsfragen vorwiegend Flächen mit endlich vielen periodischen Enden betrachtet[3]).

Neben Randstellen beeinflußt auch Asymmetrie in den Enden die Wertverteilung der erzeugenden Funktion[4]); um den Einfluß der Randstellen möglichst rein herauszuschälen, wollen wir auf komplizierte Enden verzichten und unsere Betrachtungen beschränken auf Flächen mit logarithmischen Enden sowie ein- und mehrfachen Sinusenden.

Aus der Bauart einer Randstelle auf einer Fläche aus einer gewissen Unterklasse von $\mathfrak{L}$ können wir gewisse Zahlen gewinnen und der Randstelle als *Konvergenz- (Relativ-)* und *Verschmelzungsstärken* zuordnen; aus ihnen ergibt sich in eindeutiger Weise die *Wachstumsstärke* der Randstelle. Mit dem Begriff der Wachstumsstärke kann der bekannte *Randstellensatz*, nach dem eine Funktion wenigstens die Wachstumsordnung $n/2$ hat, wenn sie eine zerfällbare Fläche mit n unmittelbaren Randstellen erzeugt, wie folgt präzisiert werden: Die Wachstumsordnung ist *gleich* der halben Summe aus den Wachstumsstärken der Randstellen. Unmittelbare Randstellen zerfällbarer Flächen haben eine Wachstumsstärke $\geqq 1$, logarithmische Windungspunkte die genaue Wachstumsstärke 1; für die Stärke mittelbarer Randstellen gibt es dagegen keine positive untere Schranke, deren Stärke kann Null sein. Gewöhnliche Sinusenden (d.h. Sinusenden, deren Verzweigungspunkte nur über zwei Spurpunkten liegen) verhalten sich in ihrem Einfluß auf das Wachstum wie Randstellen der Stärke Null. Unsere Betrachtungen schließen auch gewisse Randstellen ein, die weder mittelbar noch unmittelbar sind; auch sie haben auf zerfällbaren Flächen eine Wachstumsstärke $\geqq 1$.

Auch der Defekt eines Wertes a hängt in einfacher Weise ab von den Konvergenz- und Verschmelzungsstärken der über a liegenden Randstellen, wobei allerdings, wie zu erwarten ist, auch die Stärken *aller* Randstellen mit hineinspielen. Zwischen dem Defekt $\delta(a)$ des Wertes a und dem Beitrag der über a liegenden Randstellen zur Wachstumsordnung besteht also eine gewisse Beziehung; sie äußert sich darin, daß positive Wachstumsstärke einer Randstelle über a einen positiven Wert von $\delta(a)$ nach sich zieht, und daß umgekehrt bei positivem $\delta(a)$ wenigstens *eine* Randstelle über a positive

[2]) Möller-Ullrich, Manuskript. Vgl. Ullrich [25], Kneser-Ullrich [8] Abschnitt C.

[3]) Die Bedeutung der periodischen Enden erkannte zuerst Ullrich [23].

[4]) Wittich [28].

Wachstumsstärke hat, wenn die Wachstumsordnung der Funktion nicht überhaupt Null ist. Damit folgt: sobald eine mittelbare Randstelle über a kräftig genug ist, einen Beitrag zur Wachstumsordnung zu liefern, ist auch $\delta(a)$ positiv: positiver Defekt ist sozusagen der Regelfall[5]). Es zeigt sich ferner, daß für endlich viele verschiedene Stellensorten die Defektverteilung im wesentlichen willkürlich vorschreibbar ist; dies führt über neuere von LE-VAN und PÖSCHL beim Umkehrproblem erzielte Ergebnisse hinaus[6]).

Wir verwenden zwei Methoden, die Wertverteilung zu ermitteln; eine der beiden geht auf AHLFORS[7]) zurück, die andere stützt sich auf den Modulsatz von TEICHMÜLLER[8]). Die erste kann man als gröber bezeichnen, denn sie liefert ungenauere Ergebnisse als die zweite, sie vermag aber auch noch bei Flächen, die sich vorerst der Methode der Modulabschätzung verschließen, Aussagen zu bringen. Damit wird auf eine Frage TEICHMÜLLERS[8]) nach der Stärke und Zugkraft beider Methoden eine Antwort gegeben.

§ 1. Netz und Streckenkomplex

Bekannt ist die Konstruktion des Streckenkomplexes für schlichtartige (einfach zusammenhängende) RIEMANNsche Flächen, deren Windungspunkte sich in endlich viele Grundpunkte projizieren, und der für sie eingeführte Streckenkomplexbegriff S[9]). Wir werden im folgenden einen allgemeineren Begriff benötigen[10]): unter einem Streckenkomplex S^* verstehen wir in dieser Arbeit eine Figur aus Knoten (Ringen und Kreuzen) sowie sie verbindenden Gliedern in der abgeschlossenen komplexen Ebene mit folgenden Eigenschaften:

1. *Die Anzahl der Knoten ist abzählbar unendlich.*
2. *Die Knoten und Glieder haben nur einen Häufungspunkt, und zwar den unendlich fernen Punkt U.*
3. *Jedes Glied verbindet einen Ring mit einem Kreuz.*
4. *Verschiedene Glieder haben außer den Knoten keine gemeinsamen Punkte.*
5. *Der Streckenkomplex ist zusammenhängend.*
6. *Von jedem Knoten gehen endlich viele Glieder aus, wenigstens aber zwei.*

Der Streckenkomplex zerlegt die Ebene in Teilgebiete; diejenigen unter ihnen, die keinen Knoten im Innern enthalten, heißen *Elementargebiete*; die

[5]) Eine Frage ULLRICHS [*22*], ob mittelbare Randstellen positiven Defekt bewirken können, wurde schon positiv beantwortet von MÖLLER (in einer unveröffentlichten Arbeit, vgl. ULLRICH [*25*]) und von TEICHMÜLLER [*20*].

[6]) Das Umkehrproblem der Wertverteilung gilt der Entscheidung folgender Frage: Gibt es gebrochene Funktionen, die eine vorgegebene Verteilung der Defekte und Verzweigungsindizes besitzen (ULLRICH [*23*])? Nach anderen partiellen Lösungen löste LE-VAN [*10*] das Umkehrproblem für den Fall, daß nur endlich viele Defekte und Verzweigungsindizes von Null verschieden und diese rationalzahlig sind. PÖSCHL [*16*] zeigte, daß auch gewisse algebraische Irrationalitäten als Defekte und Verzweigungsindizes auftreten können.

[7]) AHLFORS [*1*].

[8]) TEICHMÜLLER [*19*].

[9]) NEVANLINNA [*14*], [*15*] Kap. XI, § 2; ELFVING [*2*].

[10]) Vgl. [*7*]; die dortigen Ergebnisse werden in der hier benötigten Form in diesem Paragraphen zusammengestellt.

Glieder am Rand eines Elementargebietes heißen seine *Seiten*, die Knoten am Rand seine *Eckknoten*. Zwei Elementargebiete, die eine gemeinsame Seite haben, heißen *benachbart*, ebenso zwei Glieder, die beim Umlauf um einen Knoten unmittelbar aufeinander folgen. Wir fordern für S^* ferner

[6a. *Zwei Knoten sind nicht durch benachbarte Glieder verbunden.*]

7. *Jedem Elementargebiet ist eine reelle Zahl a als Koordinate zugeordnet*[11]).

8. *Zwei benachbarten Elementargebieten sind verschiedene Zahlen zugeordnet.*

9. *Wird ein Ring R einmal in positivem Sinn umlaufen, so folgen die den Elementargebieten mit dem Eckknoten R zugeordneten Zahlen in solcher Weise aufeinander, daß die reelle Achse genau einmal in positiver Richtung durchlaufen wird; das gleiche gilt beim Umlauf um ein Kreuz im negativen Sinn*[12]).

Jedem Ring wird eine obere, jedem Kreuz eine untere Halbebene zugeordnet. Sind zwei Knoten durch ein Glied verbunden, das zwei Elementargebiete der Koordinaten a_i, a_k trennt, so werden die zugeordnete obere und untere Halbebene über demjenigen von a_i, a_k begrenzten Intervall der reellen Achse [das den Punkt ∞ enthalten kann] verheftet, dessen Durchlaufung nach 9 dem Überschreiten des Gliedes entspricht. Dem Streckenkomplex S^* wird so eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche W zugeordnet, die einfach zusammenhängend ist. Jedem $2n$-seitigen ($1 \leq n < \infty$) Elementargebiet der Koordinate a ist ein wohlbestimmter n-blättriger[13]) Windungspunkt über a, jedem unendlich-vielseitigen Elementargebiet der Koordinate a ist eine Randstelle von W über a zugeordnet. W hat Windungspunkte und Randstellen nur über der reellen Achse; umgekehrt läßt sich jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die nur über der reellen Achse Windungspunkte und Randstellen trägt, und zwar in jedem Blatt in endlicher Anzahl, die ferner von keinem Teilbogen der reellen Achse berandet wird, durch einen Streckenkomplex S^* mit den Eigenschaften 1 bis 9 darstellen.

In jedem unendlich-vielseitigen Elementargebiet wird vom Punkt U aus, in jedem endlich-vielseitigen Elementargebiet von einem inneren Punkt P des Elementargebietes aus ein — bis eventuell auf die Endpunkte — im Elementargebiet verlaufender doppelpunktfreier Jordan-Bogen so nach jedem Glied am Rand des Elementargebietes gezogen, daß die beiden auf beiden Seiten eines Gliedes endenden Bögen es im selben inneren Punkt treffen — beide zusammen nennen wir eine *Netzseite* — und daß verschiedene Bögen höchstens den Punkt U bzw. die Punkte P und den Schnittpunkt mit einem Gliede gemeinsam haben. Die Bögen selbst heißen *Netzkurven* oder *Netzlinien*.

---

[11]) In der in der Funktionentheorie üblichen Weise fassen wir ∞ als reelle Zahl auf.

[12]) Man kann natürlich hier und in 7. eine andere geschlossene doppelpunktfreie Jordan-Kurve als die reelle Achse zugrunde legen; wir werden unsere Betrachtungen auf Riemannsche Flächen beschränken, die nur über der reellen Achse verzweigt sind. Die Wahl der reellen Achse an Stelle einer anderen geschlossenen doppelpunktfreien stückweise analytischen Kurve stellt keine wesentliche Einschränkung dar.

[13]) Ein einblättriger Windungspunkt ist ein schlichter Punkt; die Bedingung 6a hat $n \geq 2$ zur Folge, so daß mit 6a also jedem Elementargebiet ein eigentlicher (wenigstens zweiblättriger) Windungspunkt zugeordnet ist.

Jedes (eventuell erst im Unendlichen) geschlossene Polygon aus Netzlinien, das genau einen Knoten im Innern enthält, heißt *Elementarpolygon*. Die ganze von den Elementarpolygonen gebildete Figur F ist ein topologisches Bild von W derart, daß jedes Elementarpolygon topologisches Bild einer (oberen oder unteren) Halbebene, jede Netzseite topologisches Bild eines Stückes der reellen Achse ist, und daß der Punkt P in einem $2n$-seitigen ($n < \infty$) Elementargebiet der Koordinate a topologisches Bild eines n-blättrigen[13]) algebraischen Windungspunktes von W über a ist. F heißt ein *Netz* von W.

Die topologische Abbildung, die W in das Netz überführt, sei überdies so beschaffen, daß sie die Flächenpunkte über $w = i$ bzw. $w = -i$ in die (punktförmig idealisierten) Ringe bzw. Kreuze überführt und daß der Schnittpunkt einer Netzseite mit einem Glied $g(x_1, x_2)$, das zwei Elementargebiete der Koordinaten x_1, x_2 trennt, Bild des Punktes

$$(1) \qquad P(x_1, x_2) = P^{\pm}(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2 - 1 \pm \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1}}{x_1 + x_2}$$

über der reellen Achse ist; das Vorzeichen der Wurzel ist so zu bestimmen, daß $P(x_1, x_2)$ in dasjenige der beiden durch x_1, x_2 bestimmten Intervalle der reellen Achse fällt, über dem das Urbild der Netzseite liegt. An den Unbestimmtheitsstellen ist $P(x_1, x_2)$ stetig zu erklären[14]). Das Glied $g(x_1, x_2)$ sei Bild des Orthogonalkreisbogenstückes zur reellen Achse, das die Endpunkte $i, -i$ hat und $P(x_1, x_2)$ enthält.

Die in der Theorie des Streckenkomplexes S [s. Fußnote 9] übliche Terminologie (wie logarithmisches Elementargebiet, algebraisches Elementargebiet, logarithmisches Ende, periodisches Ende, Kern des Komplexes usw.) übernehmen wir wörtlich für S^*; sie bezieht sich ja nur auf den Streckenkomplex qua Streckenkomplex und nicht auf ihn als Darstellung einer RIEMANNschen Fläche.

Unter einem (einfachen) *Sinusende* verstehen wir das von einer Leiter aus vierseitigen Elementargebieten gebildete periodische Ende (Fig. 1a); die beiden Knotenfolgen am Rand heißen die *Holme* des Sinusendes; ein zwei Knoten verschiedener Holme verbindendes Glied heißt *Sprosse* des Sinusendes. Unter einem *n-fachen Sinusende* ($n \geqq 1$) verstehen wir n so nebeneinander liegende Viereckleitern, daß zwei benachbarte (wenigstens) einen Holm gemeinsam haben[15]) (Fig. 1b für $n = 3$). Die Folge von Elementargebieten in einer der Viereckleitern heißt ein *Strang* des Sinusendes. Ein n-faches Sinusende hat also n Stränge. Logarithmische Elementargebiete und Stränge werden mit dem gemeinsamen Namen *Randgebiet* belegt, letztere werden auch

[14]) Bei Verschiebung eines Endpunktes des Intervalles bewegt sich $P(x_1, x_2)$ eigentlich monoton in derselben Richtung; dies ist hier die wesentliche Eigenschaft der Funktion $P(x_1, x_2)$.

[15]) Man beachte, daß zwei nebeneinanderliegende Viereckleitern auch beide Holme gemeinsam haben können; vgl. dazu ULLRICH [24], Fig. 15. Beispiele von Funktionen, die Flächen mit mehrfachen Sinusenden erzeugen, gibt PRATJE [17].

Sinusgebiet genannt. Die beiden Randgebiete, die durch ein logarithmisches Ende oder einen Sinusholm getrennt werden, heißen die *Nachbargebiete* dieser Knotenfolge, beide Randgebiete selbst heißen *benachbart*. Wegen der zwischen der Fläche W und dem Netz bestehenden eineindeutigen Abbildung und weil die Glieder des Streckenkomplexes eindeutig auf Kurven der Fläche W bezogen sind, dürfen und werden wir die Bezeichnung Sinusgebiet auf die Punktmenge von W übertragen, die den Punkten des Sinusgebietes im Streckenkomplex entspricht.

Fig. 1 a

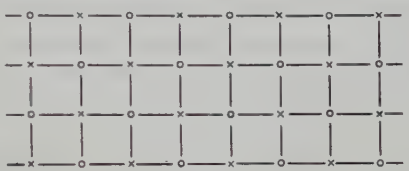

Fig. 1 b

Die in ausgearteten Fällen verwendete Terminologie wird unmittelbar verständlich sein. So sagen wir, e^z erzeuge eine Fläche mit zwei logarithmischen Enden, $\cos z$ eine Fläche mit zwei, $\cos \sqrt{z}$ eine Fläche mit einem Sinusende.

§ 2. Die Flächenklasse $\mathfrak{W}$

Wir betrachten nicht-kompakte einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen, die Windungspunkte und Randstellen nur über der reellen Achse tragen; ihr Streckenkomplex S^* besitze einen endlichen Kern mit einer endlichen Anzahl periodischer Enden folgender Arten: logarithmische Enden, einfache Sinusenden, mehrfache Sinusenden. Es komme wenigstens ein Sinusende wirklich vor — für eine einfach zusammenhängende Fläche mit endlichem Kern sowie endlich vielen periodischen, und zwar nur logarithmischen, Enden im Streckenkomplex (die ja nur über endlich vielen Punkten verzweigt ist) wurde die Wertverteilung der erzeugenden Funktion bereits bestimmt[16]). Um die Bezeichnungsweise zu vereinfachen, soll jeder Strang eines mehrfachen Sinusendes auch einfach als *Sinusende* bezeichnet werden.

Die algebraischen Elementargebiete eines Sinusendes E zerfallen in zwei Klassen nach der Art der Aufeinanderfolge von Ring und Kreuz an der dem Kern zugewandten Seite des Elementargebiets. Die Elementargebiete der einen Klasse trennen die der anderen. Jede Sprosse in E entspricht als Glied des Streckenkomplexes einem bestimmten offenen Intervall i_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$, gezählt vom Kern an) der reellen Achse. Wir nennen die Vereinigung $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} i_\nu = h(E)$ die *Hülle*, den Durchschnitt $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} i_\nu = k(E)$ den *Kern*[17]), die Menge $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=n}^{\infty} i_\nu = kh(E)$ den *Hüllenkern* des Sinusendes E und fordern:

(F_1) *Kein Sinusende habe als Kern die leere Menge.*

---

[16]) Nevanlinna [*12*], [*13*], Ahlfors [*1*], Wagner [*27*].

[17]) Die Begriffe „Kern des Streckenkomplexes" und „Kern des Sinusendes" sind auseinanderzuhalten. Der Zusammenhang läßt stets erkennen, welcher Begriff gemeint ist.

Für jedes Sinusende E werde ein Punkt des Kernes $k(E)$ ausgezeichnet, und zwar ein innerer Punkt, wenn $k(E)$ überhaupt innere Punkte hat; die Koordinate des ausgezeichneten Punktes heiße die *Koordinate des Sinusendes* bzw. des Stranges, Kernes. Es seien a, b die (notwendig verschiedenen) Koordinaten zweier benachbarter Stränge A, B in einem mehrfachen Sinusende. Die Koordinaten der Elementargebiete im Strang A bzw. B seien a_ν bzw. b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$, gezählt vom Kern des Streckenkomplexes an). Als eine gewisse Regelmäßigkeitsvoraussetzung über die Koordinaten a_ν, b_ν fordern wir:

(F_2) *Mit einer entweder konstanten oder unbeschränkten monotonen Funktion $g(\nu)$ und mit einer Konstanten K, die wir der Einfachheit halber positiv annehmen wollen, gelte für $\nu = 1, 2, \ldots$*

$$(F_2') \qquad \operatorname{Max}\left\{\left|\frac{a_\nu - a}{a_\nu - b}\right|, \left|\frac{a_{\nu+1} - a}{a_{\nu+1} - b}\right|\right\} < g(\nu) + K < \operatorname{Min}\left\{\left|\frac{b_\nu - a}{b_\nu - b}\right|, \left|\frac{b_{\nu+1} - a}{b_{\nu+1} - b}\right|\right\}$$

falls a, b beide endlich, und

$$(F_2'') \qquad \operatorname{Max}\{|a_\nu - a|, |a_{\nu+1} - a|\} < g(\nu) + K < \operatorname{Min}\{|b_\nu - a|, |b_{\nu+1} - a|\},$$

falls a, b nicht beide endlich, sondern etwa $b = \infty$ [falls $a = \infty$ sind die Buchstaben a und b zu vertauschen].

(F_3) *Liegt ein Strang A zwischen zwei Randgebieten verschiedener Koordinaten b, b', so sollen sich die Koordinaten der zu A gehörigen Windungspunkte weder gegen b noch gegen b' häufen.*

Es sei A ein Strang, B sei dasjenige Nachbargebiet von A, das — bei Blickrichtung zum Randpunkt ∞ von A — von A durch dessen linken Holm getrennt wird. $A' \neq A$ sei (wenn vorhanden) Nachbargebiet von B. Wir fordern dann:

(F_4) *Ist $h(A)$ die punktierte reelle Achse, so sei die Koordinate von A gleich der von A'.*

Die Forderung (F_1) und die Wahl der Koordinate eines Stranges haben zur Folge, daß in einem mehrfachen Sinusende die Hülle $h(A)$ eines Stranges A die Koordinate b eines benachbarten Stranges B nicht enthält; ferner sind genau dann nur $h(A)$ und b nicht durch ein Intervall der reellen Achse getrennt, wenn $h(A)$ die im Punkt b punktierte reelle Achse ist. Genau dann stimmen auch die Koordinaten der beiden Nachbargebiete des Stranges A überein. Die Forderungen (F_1) bis (F_4) sind natürlich in einer Untersuchung, die sich mit Randstellen beschäftigt, denn sie beseitigen zusätzliche Schwierigkeiten, die eine Kompliziertheit und Asymmetrie in der Struktur der periodischen Enden hervorrufen würde[18]).

Wir fassen die einfach zusammenhängenden Flächen mit endlichem Kern und endlich vielen logarithmischen Enden und Sinusenden im Streckenkomplex, die (F_1) bis (F_4) erfüllen, zur *Klasse* $\mathfrak{W}$ zusammen.

[18]) Man könnte (F_1), (F_2) dadurch abschwächen, daß man in den Definitionen von Hülle, Kern, Hüllenkern und in (F_2) ν an Stelle von 1 an von $N > 1$ an laufen ließe, ohne an den folgenden Überlegungen Wesentliches zu ändern.

Die Flächen $W \in \mathfrak{W}$ stehen in engem Zusammenhang mit den Flächen, die durch den Streckenkomplex S darstellbar sind[19]: sie gehen aus solchen dadurch hervor, daß die einzelnen algebraischen Windungspunkte auf der Zerschneidungskurve [hier: der reellen Achse] verschoben werden. Dies zeige folgende Skizze: Wir heben aus dem Streckenkomplex S^* einer Fläche $W \in \mathfrak{W}$ einen endlichen Teil T heraus, der den Kern des Komplexes ganz im Innern enthält. Den zwei Nachbargebieten eines Sinusendes E im übrigbleibenden Teil — seien es logarithmische Elementargebiete oder Sinusgebiete — ist je eine reelle Zahl, die Koordinate zugeordnet. Die Koordinaten der Windungspunkte von E fallen in dasjenige durch die Koordinaten der Nachbargebiete bestimmte offene Intervall der reellen Achse (das die punktierte reelle Achse ist, wenn beide Koordinaten übereinstimmen), das die Koordinate von E enthält; diese selbst trennt die Koordinaten der beiden Klassen von Windungspunkten in E. Verschiebt man über der Zerschneidungskurve die algebraischen Windungspunkte, die algebraischen Elementargebieten außerhalb T zugeordnet sind, so kann man erreichen, daß diejenigen Windungspunkte, die den außerhalb T liegenden algebraischen Elementargebieten irgendeines Sinusendes zugeordnet sind, über zwei Koordinaten zu liegen kommen. Die Zahl der Elementargebiete innerhalb T ist endlich, ebenso die Zahl der logarithmischen Elementargebiete (die höchstens gleich der Zahl der periodischen Enden ist); somit projizieren sich nach solcher Verschiebung sämtliche Windungspunkte der Fläche in endlich viele Grundpunkte.

§ 3. Zerschneidung und Uniformisierung

Um die Wertverteilung einer Funktion $w(z)$, die eine Fläche $W \in \mathfrak{W}$ erzeugt, zu bestimmen, erscheint es zweckmäßig, W zu zerschneiden und die einzelnen Teile getrennt zu uniformisieren. Wir beschreiben das Schnittsystem der Übersichtlichkeit halber im schlichten Netz-Streckenkomplex-Bild.

In jedem periodischen Ende gibt es *erste Knoten*, d.h. Knoten, die unmittelbar durch *ein* Glied mit einem Knoten des Streckenkomplex-Kerns verbunden sind (in den Ausartungsfällen der Streckenkomplexe von e^z, $\cos z$ usw. wird der Kern des Komplexes definitorisch so festgelegt, daß der Kern wenigstens einen Knoten enthält); letztere seien selbst als *nullte* Knoten des periodischen Endes bezeichnet. Logarithmische Enden haben *einen*, n-fache Sinusenden haben $n+1$ erste Knoten. Wir schneiden jedes periodische Ende nun längs derjenigen Netzlinien ab, die die ersten Knoten vom Kern des Komplexes trennen. Ferner werde in jedem Strang eines Sinusendes ein Schnitt auf allen Netzseiten gezogen, die „parallel zu den Holmen" von einem Elementargebiet zum andern im Strang laufen. Schließlich werden Schnitte gezogen längs der Glieder am Rand des Kerns, die nullte Knoten periodischer Enden verbinden; sie seien von dem nullten Knoten eines Endes aus, in den ein Schnittglied mündet, auf dem ersten benachbarten Glied des periodischen Endes noch so weit verlängert, daß sie die vorher gezogenen Schnitte gerade treffen. Fig. 2 zeigt Streckenkomplex und Schnittkurven (stark ausgezogen) für eine Fläche mit zwei logarithmischen Enden, zwei einfachen und einem vierfachen Sinusende.

Die endlich vielen relativ zu W abgeschlossenen Teilflächenstücke f, in die W durch die Zerschneidung zerfällt, gehören einer der folgenden drei Arten F, G, H an: Es sei

[19] Hier können sogar (F_2), (F_3), (F_4) fallengelassen werden.

$f \in F$, wenn das Bild von f im Netz ganz im endlichen liegt, f somit ein kompaktes endlich viele Blätter enthaltendes Flächenstück ist;

$f \in G$, wenn f ein endlich-vielblättriges nicht-kompaktes Flächenstück ist, dessen Bild im Netz in ein logarithmisches Elementargebiet hinein zum Punkt U reicht;

$f \in H$, wenn f ein unendlich-vielblättriges Flächenstück ist.

f^0 bezeichne die Menge der inneren Punkte von f.

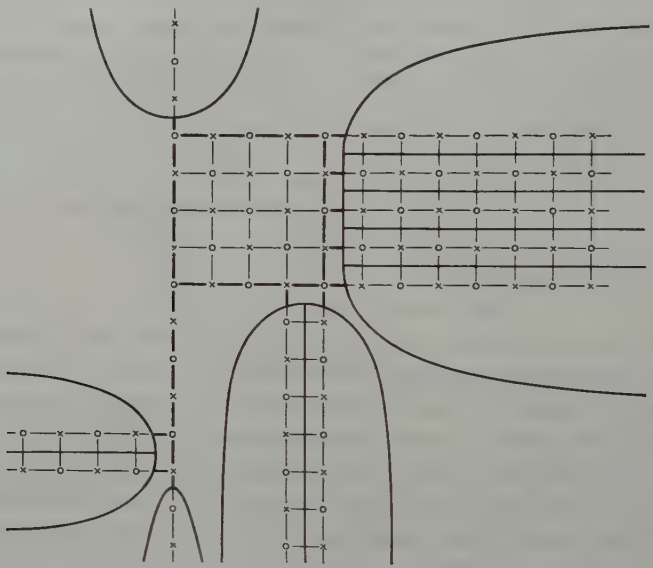

Fig. 2

Die Flächenstücke $f \in F \cup G \cup H$ können in beliebiger endlicher Anzahl auftreten. Die Flächenstücke der Klasse F werden uns im folgenden nicht beschäftigen, eine untergeordnete Rolle spielen auch die Flächenstücke $f \in G$. Wichtig sind die zuletzt genannten Flächenstücke $f \in H$, denn ihre durch die Randstellen bestimmte Struktur legt das Wertverteilungsverhalten von $w(z)$ fest.

Zwei Flächenstücke f, f', die beide in $G \cup H$ enthalten sind, heißen *benachbart*, wenn ihre Bilder im Netz längs eines Stückes einer nach Unendlich laufenden Netzseite aneinander stoßen. Die Gesamtheit der gemeinsamen Randpunkte heißt *rechter* bzw. *linker Rand* für dasjenige Flächenstück, das zur Linken bzw. zur Rechten liegt, wenn der gemeinsame Rand so durchlaufen wird, daß die Bildkurve im Netz in der zum Punkt U führenden Richtung orientiert ist.

Das Bild eines Flächenstückes $f \in H$ im Netz enthält eine der folgenden drei charakteristischen Knotenfolgen des Streckenkomplexes:

a) *Die Knotenfolge eines logarithmischen Endes.* Die benachbarten Randgebiete sind logarithmische Elementargebiete;

b) *die Knotenfolge am Rand eines (ein- oder mehrfachen) Sinusendes.* Die beiden Nachbargebiete sind ein logarithmisches Elementargebiet und ein Sinusgebiet;

c) *die Knotenfolge im Innern eines mehrfachen Sinusendes.* Die Nachbargebiete sind Sinusgebiete.

Wir fassen die Flächenstücke, die diesen drei Typen von Knotenfolgen entsprechen, in die bezüglichen Klassen H_a, H_b, H_c, so daß $H = H_a \cup H_b \cup H_c$. Den Nachbargebieten einer jeden solchen unendlichen Knotenfolge — seien es nun logarithmische Elementargebiete oder Sinusgebiete — sind zwei verschiedene Zahlen w' und w'' als Koordinaten zugeordnet; wie man sieht, liegen dann weder über w' noch über w'' innere Punkte des der Knotenfolge zugehörigen Flächenstückes; also ist $\log \frac{w - w'}{w - w''}$ eine im Innern des Flächenstückes eindeutige Funktion — die selbstverständliche kleine Modifikation, die hier oder an ähnlicher Stelle notwendig wird, wenn w' oder w'' unendlich sind, will ich übergehen —. Wir sagen, $f \in H$ habe ein Sinusgebiet oder Sinusende bzw. ein logarithmisches Gebiet (links oder im linken Teil, rechts oder im rechten Teil), wenn die zugehörige Knotenfolge als (linkes, rechtes) Nachbargebiet ein Sinusgebiet bzw. ein logarithmisches Elementargebiet besitzt. Zur Schreibweise verabreden wir: g, h, h_a, h_b, h_c bedeuten immer Flächenstücke aus G, H, H_a, H_b, H_c beziehentlich; Flächenstücke f können zu einer beliebigen Klasse gehören; $f^0, g^0, h^0, h_a^0, h_b^0, h_c^0$, bezeichnen die Menge innerer Punkte in den entsprechenden Flächenstücken. Ein Flächenstück g bzw. h_a, h_b, h_c hat als Nachbarflächenstücke nur Flächenstücke h_a oder h_b bzw. g, g oder h_b oder h_c, h_b oder h_c. In jedem Flächenstück g ist eine Randstelle von W erreichbar; ist a die Koordinate dieser Randstelle, so ist wegen der Wahl der topologischen Abbildungen von W ins Netz kein innerer Punkt von g über $P^-(a, a) = -a^{-1}$ enthalten; es ist also $\log \frac{w - a}{w + a^{-1}}$ für $a \neq 0, \infty$, und $\log w$ für $a = 0$ oder $a = \infty$ in g^0 eindeutig.

Ein Flächenstück $f \in G \cup H_b$ enthält am Rand genau eine Randstelle von W, die *unmittelbar relativ zu* f ist; sie entspricht dem logarithmischen Elementargebiet, in das das Netzbild von f hineinreicht. $f \in H_b$ hat genau dann eine weitere Randstelle von W am Rand, die *mittelbar ist relativ zu* f, wenn der Hüllenkern des Sinusendes von $f = h_b$ aus nur einem Punkt besteht. Ebenso enthält ein Flächenstück h_c am Rand null, eine oder zwei (relativ mittelbare) Randstellen von W, je nachdem sich null, einer oder zwei Hüllenkerne der Nachbargebiete für die zugehörige Knotenfolge auf einen Punkt reduzieren[20]). Ein Flächenstück h_a enthält am Rand stets zwei verschiedene (relativ unmittelbare) Randstellen von W, die den logarithmischen Elementargebieten entsprechen, die Nachbargebiete der zugehörigen Knotenfolge sind. Da jedes

[20]) Jeder Weg, dessen Bild im Netz in einem Strang E gegen den Punkt U strebt, muß sich von der Koordinate eines inneren Punktes des Hüllenkernes $kh(E)$ immer wieder um ein positiv nach unten beschränktes Stück entfernen; andererseits hat der Weg auf der holmparallelen Netzlinie in E ein Bild auf W, dessen Koordinaten sich schließlich beliebig wenig von $kh(E)$ entfernen.

Sinusende und jedes logarithmische Elementargebiet Nachbargebiet für zwei Knotenfolgen ist, muß die Anzahl der relativen Randstellen in den Flächenstücken wenigstens doppelt so groß sein, wie die Anzahl der Randstellen von W — sie kann aber noch wesentlich größer sein, wenn nämlich mehreren Randgebieten dieselbe Randstelle von W zugeordnet ist, wenn, wie wir sagen, verschiedene Relativ-Randstellen zu einer einzigen Randstelle der Fläche verschmolzen sind[21]). Fig. 3 gibt ein typisches Beispiel: sie zeigt den Streckenkomplex einer Fläche, in der zwei mittelbare (mit Bildern in den Randgebieten R_2, R_3) und zwei unmittelbare Relativ-Randstellen (mit Bildern in den Randgebieten R_1, R_4) zu einer einzigen (weder mittelbaren noch unmittelbaren) Randstelle der Fläche verschmolzen sind.

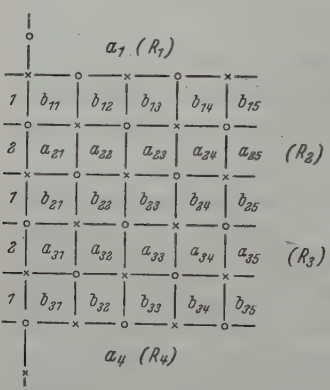

Fig. 3.
Die Koordinaten sind in die Elementargebiete hineingeschrieben. $a_1 = a_4 = \infty$;
$b_{1\nu} = b_{2\nu} = b_{3\nu} = (-1)^\nu \cdot \left[\frac{\nu+2}{2}\right]$;
$a_{2\nu} = a_{3\nu} = (-1)^\nu \cdot \left[\frac{\nu+4}{2}\right]$

§ 4. Die Ausschöpfung der Fläche

Wir nehmen an, daß bei der im letzten Paragraphen beschriebenen Zerschneidung m Flächenstücke $f_\mu \in G \cup H$ ausfallen ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) — diese werden unserer Verabredung gemäß auch mit g, h, h_a, h_b, h_c respektive bezeichnet. Es hatte sich ergeben, daß es für jedes Flächenstück f_μ zwei Zahlen w'_μ, w''_μ derart gibt, daß $\zeta_\mu(w) = \log \dfrac{w - w'_\mu}{w - w''_\mu}$ — mit trivialer Modifikation, falls w'_μ oder w''_μ unendlich — in f^0_μ eine eindeutige Funktion darstellt. Für $f_\mu \in H$ sei w'_μ die Koordinate des linken, w''_μ die Koordinate des rechten Nachbargebietes der f_μ zugehörigen Knotenfolge; für $f_\mu \in G$ sei w''_μ die Koordinate der in f_μ erreichbaren Randstelle von W und $w'_\mu = -w''^{-1}_\mu$. $\zeta_\mu(w)$ bildet ein Flächenstück g^0 ab in einen Halbstreifen der Breite $n\pi$, wenn n die Anzahl der Knotenpunkte am Rand des Bildes von g im Netz ist; das ζ_μ-Bild eines Flächenstückes h^0 liegt in einer Halbebene $\Im(\zeta_\mu) > \gamma_\mu$, γ_μ reell. Als Bild von h^0_a entsteht eine Halbebene; das Bild von h^0_b ist eine Halbebene, die auf Parallelen zur reellen Achse im Abstand π Einschnitte, *Gräten*, trägt, sie rühren davon her, daß die im Sinusgebiet verlaufende Berandung von h_b mit einem Punkt über der Koordinate des Sinusendes ein ganzes Intervall der reellen Achse mit der Koordinate im Innern enthält [vgl. (F_1)]. Die Halbebene ist entweder nach rechts oder nach links aufgeschnitten. Ganz ähnliche Verhältnisse liegen vor bei dem ζ_μ-Bild von h^0_c; der einzige Unterschied ist, daß die Bildhalbebene sowohl nach rechts wie nach links auf Parallelen zur reellen Achse im Abstand π aufgeschlitzt ist, also beidseitig Gräten trägt.

Durch eine Transformation $\zeta^{(\mu)}(w) = \zeta_\mu(w) + i\gamma^{(\mu)}$, $\gamma^{(\mu)}$ reell, erreichen wir, daß die $\zeta^{(\mu)}$-Bilder $h^{0\zeta}$ von h^0 mit der oberen Halbebene $\Im(\zeta^{(\mu)}) > 0$ bzw. mit der

[21]) Genaueres darüber in § 7 und in [7]. Zur Klassifikation von Randstellen vgl. auch IVERSEN [9] und ULLRICH [24].

geschlitzten oberen Halbebene zusammenfallen; ebenso erreichen wir, daß das $\zeta^{(\mu)}$-Bild $g^{0\zeta}$ eines g^0, dessen Bild im Netz n Knotenpunkte am Rand enthält, in $0<\Im(\zeta^{(\mu)})<n\pi i$, $\Re(\zeta^{(\mu)})>\xi^{(\mu)}$ mit geeignetem reellen $\xi^{(\mu)}$ fällt (Fig. 4). Die Begrenzungen der Bildgebiete $h^{0\zeta}$, $g^{0\zeta}$ sind in gewisser Weise miteinander zu identifizieren, wie bestimmt durch das Aneinanderstoßen der Flächenstücke h, g auf der Fläche W. Wir beachten, daß die Anzahl der Flächenstücke $h\in H$ größer oder gleich 2 ist, da W wenigstens ein Sinusende hat [aus dem bei der Zerschneidung zwei Flächenstücke $h\in H$ oder Teile von solchen hervorgehen]. Es werde ein Flächenstück $f_1\in G\cup H$ als *erstes* ausgezeichnet; das über den rechten Rand an f_μ anstoßende rechte Nachbarflächenstück von f_μ bezeichnen wir mit $f_{\mu+1}$ ($\mu=1,2,\ldots,m$; genommen modulo m). Das $\zeta^{(\mu)}$-Bild Q_μ von f_μ^0 werde in die Ebene E_μ mit der laufenden Koordinate $\zeta_\mu=\xi_\mu+i\eta_\mu$ gelegt. Wir bezeichnen $E_{\mu+1}$ auch als *rechte Nachbarebene* von E_μ. Die durch ein linkes (rechtes) Sinusgebiet eines Flächenstückes $f_\mu\in H_b\cup H_c$ hervorgerufenen Gräten im $\zeta^{(\mu)}$-Bild heißen *linke (rechte) Gräten*, das $\zeta^{(\mu)}$-Bild des linken (rechten) Randes von $f_\mu\in G\cup H$ heiße *linker (rechter) Rand* von Q_μ.

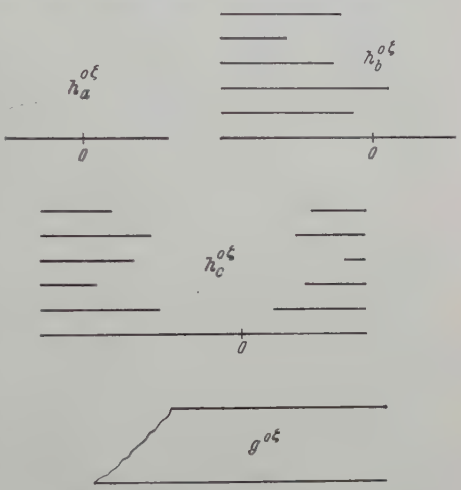

Fig. 4

In den uniformisierenden Transzendenten $\zeta^{(\mu-1)}(w)$, $\zeta^{(\mu)}(w)$ ist

$$w'_\mu = w''_{\mu-1}, \quad \text{wenn } f_\mu\in H, \tag{2}$$

$$w''_\mu = -\frac{1}{w'_\mu} = w''_{\mu-1}, \quad \text{wenn } f_\mu\in G; \tag{2'}$$

es ist überdies jedenfalls

$$w''_\mu = w'_{\mu-1}, \tag{2''}$$

wenn $f_\mu, f_{\mu-1}$ Teile eines Sinusgebietes gemeinsam haben, dessen Hülle die punktierte reelle Achse ist.

Es sei zunächst $f_\mu\in H$ und es sei (2'') nicht erfüllt. Dann gibt es einen Streifen $K_\mu^-<\Re(\zeta_\mu)<K_\mu^+$ in E_μ, der nur endlich viele Gräten trifft. [Nach (F_4) hat kein Sinusende von f_μ als Hülle die punktierte reelle Achse, nach (F_3) häufen sich die Realteile rechter bzw. linker Grätenendpunkte nicht gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$, womit nach (F_2) die Behauptung folgt.] Ist dazu $f_{\mu-1}\in H$, so folgen die Punkte $\zeta^{(\mu)}(w'_{\mu-1})$ auf einer Parallelen zur imaginären Achse im Abstand 2π aufeinander, sie haben — von etwa vorhandenen — linken Gräten positiven Abstand. Z_μ^-, Z_μ^+ seien zwei Parallelen zur imaginären Achse innerhalb des Streifens mit $\Re(Z_\mu^-)<\Re(\zeta^{(\mu)}(w'_{\mu-1}))$, $\Re(Z_\mu)<\Re(Z_\mu^+)$. E_μ^-

sei das links von Z_μ^-, E_μ^+ das rechts von Z_μ^+, S_μ das zwischen Z_μ^- und Z_μ^+ liegende Teilgebiet der oberen Halbebene. Wir dürfen für das folgende annehmen, daß auch das durch $-\zeta^{(\mu-1)}$ vermittelte Bild der Z_μ^- auf W entsprechenden Kurve ganz links von Z_μ^+ liegt [vgl. (Q_1), (Q_3) unten]; ist dies nämlich nicht sowieso der Fall, so würde man E_μ so quasikonform auf sich abbilden, daß E_μ^- ungeändert bleibt, daß E_μ^+ durch eine Translation genügend weit nach rechts geschoben wird, während S_μ durch eine quasikonforme Abbildung mit konstantem Dilatationsquotienten in Richtung der reellen Achse gestreckt wird. Wie man leicht sieht, würde diese zusätzliche quasikonforme Transformation an den folgenden Überlegungen nichts Wesentliches ändern.

Ist dagegen μ ein solcher Index, daß $f_\mu \in G$, so sei Z_μ^+ eine Parallele zur imaginären Achse mit $\Re(\mathsf{Z}_\mu^+) > \mathrm{Max}\left[\Re\left(\zeta^{(\mu)}(w'_{\mu-1})\right), \Re\left(\zeta^{(\mu)}(w''_{\mu+1})\right)\right]$ und E_μ^+ das rechts von Z_μ^+ liegende Teilgebiet von Q_μ.

Wir betrachten die quasikonforme Transformation $q_\mu(\zeta_\mu)$ von E_μ, die in folgender Weise bestimmt sei:

$$(Q_1)\quad \left.\begin{aligned} q_\mu(\zeta^{(\mu)}) &= \zeta^{(\mu)} \quad \text{in} \quad E_\mu^+ \\ &= -\zeta^{(\mu-1)} \quad \text{in} \quad E_\mu^- \end{aligned}\right\} \quad \textit{falls } f_\mu \in H,\ f_{\mu-1} \in H;$$

(Q_2) $q_\mu(\zeta^{(\mu)}) = \zeta^{(\mu)}$ *in* E_μ, *falls* $f_\mu \in H$, $f_{\mu-1} \in G$, *oder falls für den Index* μ *die Bedingung* $(2'')$ *erfüllt ist;*

(Q_3) *falls* $f_\mu \in H$ *werde jeder Streifen* $(\nu-1)\pi \leqq \Im(\zeta_\mu) \leqq \nu\pi$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *durch* q_μ *in sich transformiert, und es sei außerdem* q_μ *schlicht und zweimal stetig differenzierbar in* E_μ *und habe die Periode* $2\pi i$*;*

(Q_4) *falls* $f_\mu \in G$, *sei*

$$q_\mu(\zeta^{(\mu)}) = \frac{2}{n\pi}\left[\left(\eta_\mu - \frac{n\pi}{2}\right)\zeta^{(\mu-1)} + (n\pi - \eta_\mu)\zeta^{(\mu)}\right] \textit{ in } E_\mu^+ \textit{ für } \frac{n\pi}{2} \leqq \eta_\mu \leqq n\pi$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\left(\frac{n\pi}{2} - \eta_\mu\right)\zeta^{(\mu+1)} + \eta_\mu \cdot \zeta^{(\mu)}\right] \textit{ in } E_\mu^+ \textit{ für } 0 \leqq \eta_\mu \leqq \frac{n\pi}{2},$$

wobei $n\pi$ *der Abstand des rechten und linken Randes von* Q_μ *ist.*

Falls $f_\mu \in H$, ist der Dilatationsquotient der Abbildung q_μ nur in $|\Re(\zeta_\mu)| < K$, mit geeignetem $K > 0$, von Eins verschieden und dort beschränkt; falls $f_\mu \in G$, so ist der Dilatationsquotient in Q_μ beschränkt. Ferner erhält man

$$q_\mu(\zeta_\mu) - \zeta_\mu = O(1). \tag{3}$$

Die Transformation q_μ bewirkt weiter, daß zwei miteinander zu identifizierende Punkte auf dem rechten Rand von $q_{\mu-1}(Q_{\mu-1})$ und dem linken Rand von $q_\mu(Q_\mu)$, die genügend weit vom Nullpunkt entfernt sind, entweder zur imaginären Achse spiegelbildlich liegen (wenn $f_\mu \in H$) oder durch die Transformation $q_\mu - n\pi i$ zur Deckung gebracht werden (wenn $f_\mu \in G$, wobei n die Knotenanzahl am Rand des Bildes von f_μ im Netz ist).

Für hinreichend großes ϱ gibt es auf dem Kreisbogen $|\zeta_\mu| = \varrho$ für $f_\mu \in H$, bzw. auf der Geraden $\Re(\zeta_\mu) = \varrho$ für $f_\mu \in G$, ein wohlbestimmtes Stück B_ϱ^μ resp. $\tilde{B}_\varrho^\mu$, das den rechten und den linken Rand von $q_\mu(Q_\mu)$ resp. Q_μ verbindet und

bis auf die Endpunkte ganz innerhalb $q_\mu(Q_\mu)$ resp. Q_μ liegt[22]). Auf Grund der Bestimmung von $q_{\mu-1}$, q_μ ist für hinreichend großes ϱ der Schnittpunkt von $B_\varrho^{\mu-1}$ mit dem rechten Rand von $q_{\mu-1}(Q_{\mu-1})$ äquivalent zum Schnittpunkt von B_ϱ^μ mit dem linken Rand von $q_\mu(Q_\mu)$, d. h. die Urbilder beider Punkte auf der Fläche W sind miteinander zu identifizieren: sie fallen zusammen. Es ist für solche ϱ also das Bild $B_{\varrho,w}$ von $\bigcup_{\mu=1}^{m} B_\varrho^\mu$ auf W eine geschlossene Kurve, die überdies doppelpunktfrei ist, weil die Flächenstücke f_μ^0 punktfremd sind und höchstens je zwei benachbarte von ihnen Randpunkte des rechten oder linken Randes gemeinsam haben. Zwei Kurven $B_{\varrho',w}$ und $B_{\varrho'',w}$ $(\varrho_0 < \varrho' < \varrho'')$ schließen also für genügend großes ϱ_0 ein Ringgebiet $G(\varrho', \varrho'')$ ein.

§ 5. Der Modul von Ringgebiet und Viereck

Ein Ringgebiet kann stets konform auf einen Kreisring bezogen werden; der positive Logarithmus des Radienquotienten des Kreisringes heißt der *Modul* des Ringgebietes, er ist konform invariant. Ein von der punktierten Ebene verschiedenes einfach zusammenhängendes Gebiet, in dem vier Randelemente ausgezeichnet sind, heißt *Viereck*. Wir zeichnen ein Paar gegenüberliegender Seiten, die *α-Seiten (α-Mengen, α-Randmengen)* des Vierecks aus; das andere Paar bezeichnen wir als die *β-Seiten* des Vierecks. Wir bilden das Viereck so in ein Rechteck ab, daß die β-Seiten in Parallelseiten der Länge 2π übergehen; die Länge M der transformierten α-Seiten ist eindeutig bestimmt und heißt *Modul des Vierecks* [bezüglich der ausgewählten α-Seiten; Vertauschung von α- und β-Seiten führt zum Modul $4\pi^2/M$]. Wird ein Kreisring vom Modul M durch einen Schnitt auf einem Radius in ein Viereck zerlegt, und werden die Schnittufer als α-Seiten gewählt, so hat das gewonnene Viereck ebenfalls den Modul M.

Es gelten folgende Lemmen[23]).

Lemma 1. *Wird ein Viereck (Ringgebiet) über einer β-Seite (einem Randkontinuum) erweitert oder über einer α-Seite verengt, so steigt der Modul.*

Lemma 2. *Der Modul eines Viereckes steigt, wenn ein Teil der β-Seiten als α-Menge gezählt wird, d. h. wenn ein Eckpunkt des Vierecks so auf der Berandung verschoben wird, daß die α-Menge vermehrt wird.*

Lemma 3. a) *Liegen in einem Kreisring R des Moduls M zwei fremde Ringgebiete R', R'' der Moduln M', M'', von denen jedes die beiden Randkontinuen trennt, so gilt $M' + M'' \leq M$; das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn R', R'' konzentrische Kreisringe sind, die zusammen den Kreisring R ausfüllen.*

---

[22]) Dies ist unmittelbar einzusehen falls $f_\mu \in G \cup H_a \cup H_b$. Das gleiche gilt für $f_\mu \in H_c$, falls $q_\mu(\zeta^{(\mu)}) = \zeta^{(\mu)}$ ist [jedenfalls also wenn ein Sinusende von f_μ als Hülle die punktierte reelle Achse hat], ebenso, falls es auch in $q_\mu(Q_\mu)$ einen Vertikalstreifen gibt, der nur endlich viele Gräten trifft. Andernfalls erkennt man für $f_\mu \in H_c$ die Richtigkeit der Aussage daraus, daß bei einer Bewegung auf dem Kreis $|\zeta_\mu| = \varrho$ vom Punkt $i\varrho$ aus zu einem Punkt mit dem Imaginärteil $\varrho - 1$ sich der Realteil in der Größenordnung $\sqrt{\varrho}$ ändert.

[23]) Sie finden sich in Teichmüller [19] oder sind mit den dortigen Überlegungen leicht zu gewinnen.

b) *Wird ein Kreisring des Moduls M durch beide Randkontinuen verbindende punktfremde Querschnitte in n Vierecke zerlegt, die bezüglich der Querschnitte als α-Seiten die Moduln M_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ haben, so gilt $\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} \leqq M^{-1}$; das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn alle Querschnitte auf Radien des Kreisringes liegen.*

Lemma 4 [24]). *Es werde ein Rechteck R des Moduls M in der z-Ebene $(z = x + iy)$, dessen β-Seiten Parallelseiten der Länge 2π sind, quasikonform auf ein Viereck V' des Moduls M' abgebildet; $Q(z)$ sei der Dilatationsquotient an der Stelle z. Dann gilt*

$$|M - M'| \leqq \frac{1}{2\pi} \iint_R \{Q(z) - 1\}\, dx\, dy.$$

Lemma 5. *In der z-Ebene sei gegeben eine Kurvenschar C_ϱ $(\varrho > 0)$ von geschlossenen doppelpunktfreien Kurven mit der Eigenschaft, daß für $\varrho' < \varrho''$ die Kurve $C_{\varrho'}$ durch die Kurve $C_{\varrho''}$ vom Punkt ∞ getrennt wird und daß C_ϱ sich für $\varrho \to \infty$ auf den Punkt ∞ zusammenzieht. Der Modul des von $C_{\varrho'}$, $C_{\varrho''}$ eingeschlossenen Ringgebietes sei $M(\varrho', \varrho'')$. Wir setzen*

$$u_1(\varrho) = \operatorname*{Min}_{C_\varrho} |z|, \qquad u_2(\varrho) = \operatorname*{Max}_{C_\varrho} |z|,$$

und bezeichnen Größen, die im limes $\varrho \to \infty$ verschwinden, mit $\varepsilon(\varrho)$. Wenn dann eine Funktion $g(\varrho)$ und eine Zahl $K > 0$ existiert, so daß mit festem $\varrho_0 > 0$ für $\varrho_0 < \varrho' < \varrho''$ und $M(\varrho', \varrho'') \geq K$ stets die Beziehung

$$M(\varrho', \varrho'') - \int_{\varrho'}^{\varrho''} g(\varrho)\, \frac{d\varrho}{\varrho} = \varepsilon(\varrho')$$

gilt, so ist mit geeignetem $k > 0$

$$u_i(\varrho) = k e^{f(\varrho)} \left(1 + \varepsilon(\varrho)\right), \quad \text{wo} \quad f(\varrho) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} g(\varrho)\, \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad i = 1, 2.$$

In anderen Worten: *unter den Voraussetzungen des Lemma 5 sind die Kurven C_ϱ asymptotisch kreisnahe.* Bei der Untersuchung von Wertverteilungsproblemen ist es oft nützlich, solche Kurven zur Verfügung zu haben.

§ 6. Bestimmung der Wachstumsordnung

6.1. Wir nehmen in diesem ganzen Paragraphen an, daß $\varrho, \varrho', \ldots$ größer seien als eine hinreichend groß gewählte Zahl; $\varepsilon(x)$ bezeichne Größen, die im limes $x \to \infty$ verschwinden.

Der Modul des Ringgebietes $G(\varrho', \varrho'')$, das von den Kurven $B_{\varrho', w}$ und $B_{\varrho'', w}$ $(\varrho' < \varrho'')$ eingeschlossen wird, sei $M(\varrho', \varrho'')$. Durch die Schnittkurven σ auf der Fläche W, die — gleich wie ihre konformen und quasikonformen Bilder in den Ebenen E_μ — immer als α-Menge gewählt werden, wird $G(\varrho', \varrho'')$ in m

[24]) AF HÄLLSTRÖM [4] beweist das entsprechende Lemma für Ringgebiete.

verschiedene Vierecke zerlegt; der Modul desjenigen Vierecks, das durch $\zeta^{(\mu)}(w)$ in die Ebene E_μ abgebildet wird, sei $M_\mu(\varrho', \varrho'')$, der Modul des durch q_μ vermittelten quasikonformen Bildes $v_\mu(\varrho', \varrho'')$ sei $m_\mu(\varrho', \varrho'')$. Nach Lemma 3b) gilt

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{M_\mu(\varrho', \varrho'')} \leq \frac{1}{M(\varrho', \varrho'')}. \tag{4}$$

Die Länge von B_ϱ^μ sei $\pi\lambda_\mu(\varrho)\cdot\varrho$; $\lambda_\mu(\varrho)$ ist eine stückweise stetige Funktion. Falls ϱ_μ eine Stetigkeitsstelle von $\lambda_\mu(\varrho)$ ist [dann trifft jedenfalls B_ϱ^μ den Rand von $q_\mu(Q_\mu)$ unter von Null verschiedenem Winkel], erhält man mit Hilfe der Lemmata 1, 2 die Gleichung

$$m_\mu(\varrho_\mu, \varrho_\mu + d\varrho) = \frac{2}{\lambda_\mu(\varrho_\mu)} \frac{d\varrho}{\varrho_\mu}. \tag{5}$$

Mit Lemma 4 folgt weiter die Gleichung

$$M_\mu(\varrho_\mu, \varrho_\mu + d\varrho) = m_\mu(\varrho_\mu, \varrho_\mu + d\varrho) + \frac{O(1)}{\{\lambda_\mu(\varrho_\mu)\}^2} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho_\mu^2}, \tag{6}$$

denn für $f_\mu \in H$ ist der Dilatationsquotient der Transformation q_μ beschränkt und nur in einem Vertikalstreifen endlicher Breite von Eins verschieden, während er für $f_\mu \in G$ beschränkt ist. Es sei $\lambda_\mu(\varrho)$ stetig für alle μ an einer Stelle ϱ_0. Dann gilt für das infinitesimale Ringgebiet $G(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho)$ nach Lemma 3b) die *Gleichung*

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{M_\mu(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho)} = \frac{1}{M(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho)}, \tag{7}$$

denn bei der konformen Abbildung von $G(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho)$ auf einen infinitesimalen Kreisring um den Nullpunkt der z-Ebene schwankt das Argument von z auf den Bildern der Schnittkurven σ beliebig wenig, wenn nur $d\varrho$ genügend klein ist, weil die Schnittkurven σ auf W stückweise analytisch sind und weil $B_{\varrho_0, w}$ jede Schnittkurve mit wohlbestimmter Tangente trifft, die mit ihr einen von Null verschiedenen Winkel bildet [nach einer quasikonformen Abbildung mit beschränktem Dilatationsquotienten, die σ fest läßt, durchsetzt $B_{\varrho_0, w}$ jede Schnittkurve im Kleinen spiegelbildlich].

Für ein $g^{0\zeta}$ in E_μ ist $\lambda_\mu(\varrho) = \frac{n}{\varrho}$, wenn am Rand des Bildes von g im Netz n Knoten liegen. Für ein $h_a^{0\zeta}$ ist $\lambda_\mu(\varrho) \equiv 1$. In einem $h_b^{0\zeta}$ oder einem $h_c^{0\zeta}$ liegt $\lambda_\mu(\varrho)$ zwischen 0 und 1 (die Grenzen ausgeschlossen). Konvergieren in einem Flächenstück h_b die Koordinaten der algebraischen Windungspunkte gegen die Koordinate des der zugehörigen Knotenfolge benachbarten logarithmischen Elementargebietes, so liegt $\lambda_\mu(\varrho)$ asymptotisch zwischen 0 und $\frac{1}{2}$; ein Grenzwert für $\lambda_\mu(\varrho)$ braucht selbstverständlich nicht zu existieren. Je nach der Stärke der Konvergenz kann $\lambda_\mu(\varrho)$ asymptotisch 0 (starke Konvergenz) oder $\frac{1}{2}$ (schwache Konvergenz) werden, jedoch ist stets $\lim \varrho\,\lambda_\mu(\varrho) = \infty$. Konvergieren dagegen die Koordinaten der algebraischen Windungspunkte gegen

eine andere als die oben erwähnte Koordinate [es liegt dann eine relativ mittelbare Randstelle über der Konvergenzkoordinate], so liegt $\lambda_\mu(\varrho)$ asymptotisch zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 je nach der Stärke der Konvergenz; zum Wert $\frac{1}{2}$ gehört schwache, zum Wert 1 starke Konvergenz. Ganz analog liegen die Verhältnisse, wenn zu einem Flächenstück h_c genau eine (relativ mittelbare) Randstelle gehört; $\lambda_\mu(\varrho)$ liegt dann asymptotisch zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und es ist $\lim \varrho\,\lambda_\mu(\varrho) = \infty$. Gehören jedoch zu h_c zwei verschiedene (relativ mittelbare) Randstellen, so entspricht starker Konvergenz der Windungspunkte der asymptotische Wert 1 für $\lambda_\mu(\varrho)$, schwacher der asymptotische Wert 0. Wieder ist $\lim \varrho\,\lambda_\mu(\varrho) = \infty$. Hat aber kein Sinusende von h_c als Kern die punktierte reelle Achse, so gilt mit $a > 0$ die Beziehung $a\,\varrho^{-1} \leqq \lambda_\mu(\varrho) = O(\varrho^{-\frac{1}{2}})$.

Wir setzen in (7) die durch (5), (6) gegebene Größe für $M_\mu(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho)$ ein und erhalten unter Beachtung von $M_\mu(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho) \geqq c_\mu^{-1} m_\mu(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho)$, wo c_μ das Maximum des Dilatationsquotienten der Abbildung q_μ ist, nach kurzer Rechnung die Beziehung

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{2\,d\varrho}{\sum\limits_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho_0)\cdot\varrho_0 + c(\varrho_0)} \leqq M(\varrho_0, \varrho_0 + d\varrho) \\ \text{für ein } c(\varrho_0) \text{ mit } \varrho_0 \cdot \sum\limits_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho_0) > -c(\varrho_0) = O(1). \end{cases}$$

Nach Lemma 3a) erschließen wir für den Modul des Ringgebietes $G(\varrho', \varrho'')$ die Ungleichung

$$(9)\quad \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\sum\limits_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho) + \frac{c(\varrho)}{\varrho}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} \leqq M(\varrho', \varrho'').$$

Da $M(\varrho', \varrho'')$ stets endlich, aber $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho) \leqq m$, strebt $M(\varrho', \varrho'')$ mit $\varrho'' \to \infty$ selbst gegen unendlich, es gilt also der

Satz 1. *Alle Flächen der Klasse* $\mathfrak{W}$ *haben parabolischen Typus*[25]).

6.2. Um mit Hilfe von Lemma 5 die Wertverteilung der meromorphen Funktion bestimmen zu können, die die Fläche W erzeugt, brauchen wir die zu (9) umgekehrte Ungleichung.

Es sei A die Menge derjenigen μ, für die Q_μ Bild eines Flächenstückes h^0 ist, B die Restmenge. Wir ziehen in E_μ, $\mu \in A$, zwei stückweise glatte Kurven b_μ^1, b_μ^2, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(10a) *sie laufen von* 0 *nach* ∞ *und sind, vom Endpunkt* ∞ *abgesehen, schließlich punktfremd;*

(10b) *sie enthalten schließlich nur Punkte des Innern oder des Randes von* $q_\mu(Q_\mu)$;

(10c) *sie durchsetzen jeden Kreis* $|\zeta_\mu| = \varrho$ *(nur einmal) unter von Null verschiedenem Winkel.*

[25]) Für ähnlich gebaute Flächen zeigen dies auf andere Weise bereits ULRICH [26] und MACLANE [11].

[Eine kleine Überlegung zeigt, daß die Bedingungen (10) wegen (F_1), (F_2) erfüllbar sind.]

Die Kurve b_μ^k, $k=1,2$, habe in Polarkoordinaten $\zeta_\mu = \varrho_\mu e^{i\varphi_\mu}$ die Gleichung $\varphi_\mu = \pi\lambda_\mu^k(\varrho)$; die Indizes seien so gewählt, daß $0 \leq \lambda_\mu^1(\varrho) < \lambda_\mu^2(\varrho) \leq 1$; das Stück $B_\varrho^\mu{}^*$, das b_μ^1 und b_μ^2 aus B_ϱ^μ ausschneiden, hat die Länge $\pi\lambda_\mu^*(\varrho)\cdot\varrho$, wo $\lambda_\mu^* = \lambda_\mu^2 - \lambda_\mu^1$ ist. Der Modul $m_\mu^*(\varrho', \varrho'')$ des Vierecks $v_\mu^*(\varrho', \varrho'')$, das von b_μ^k als α-Bogen und von $B_{\varrho'}^\mu{}^*$, $B_{\varrho''}^\mu{}^*$ als β-Bogen begrenzt wird, ist (nach den Lemmata 1, 2) wenigstens ebenso groß wie $m_\mu(\varrho', \varrho'')$. Um $m_\mu^*(\varrho', \varrho'')$ nach oben abzuschätzen, bilden wir $v_\mu^*(\varrho', \varrho'')$ quasikonform ab in die ω_μ-Ebene, $\omega_\mu = \sigma_\mu \cdot e^{i\psi_\mu}$, durch

$$(11) \qquad \begin{cases} \sigma_\mu = \varrho_\mu \\ \psi_\mu = \dfrac{2}{\lambda_\mu^*(\varrho)}\left(\varphi_\mu - \pi\dfrac{\lambda_\mu^1 + \lambda_\mu^2}{2}\right). \end{cases}$$

Gleichzeitig werde $v_\mu^*(\varrho', \varrho'')$ konform durch $\log z_\mu(\zeta_\mu)$ so auf ein Rechteck abgebildet, daß die β-Seiten in Parallelseiten der Länge 2π übergehen; dann erhalten wir für den Modul $m_\mu^*(\varrho', \varrho'')$ die Beziehung

$$(12) \qquad m_\mu^*(\varrho', \varrho'') \leq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \left|\frac{d\log z_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right| d\log\sigma_\mu = \int_{\varrho'}^{\varrho''} \sqrt{\left|\frac{d\log z_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right|^2}\, d\log\sigma_\mu.$$

Das Flächenelement in der $\log z_\mu$-Ebene bezeichnen wir mit $D\log z_\mu$, analog in anderen Ebenen ein Flächenelement durch Vorsetzen von D. Es ist dann

$$(13) \qquad \left|\frac{d\log z_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right|^2 = \left|\frac{d\log z_\mu}{d\log\zeta_\mu}\right|^2 \cdot \left|\frac{d\log\zeta_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right|^2 = \frac{D\log z_\mu}{D\log\zeta_\mu}\cdot\left|\frac{d\log\zeta_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right|^2.$$

Mit

$$1 = \frac{D\log\zeta_\mu}{D\log\omega_\mu}\cdot\frac{D\log\omega_\mu}{D\log\zeta_\mu} = \frac{D\log\zeta_\mu}{D\log\omega_\mu}\cdot\frac{2}{\lambda_\mu^*}$$

erhalten wir

$$\left|\frac{d\log z_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right|^2 = \frac{D\log z_\mu}{D\log\zeta_\mu}\cdot\frac{D\log\zeta_\mu}{D\log\omega_\mu}\cdot\frac{2}{\lambda_\mu^*}\left|\frac{d\log\zeta_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right|^2.$$

Aus (11) gewinnen wir mit $|\psi_\mu| \leq \pi$

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\log\zeta_\mu}{d\log\sigma_\mu}\right|^2 &= 1 + \frac{1}{4}\left\{\frac{d\lambda^*}{d\log\sigma_\mu}\psi_\mu + \pi\cdot\frac{d(\lambda_\mu^1+\lambda_\mu^2)}{d\log\sigma_\mu}\right\}^2 \\ &\leq 1 + \pi^2\cdot\left\{\left|\frac{d\lambda_\mu^1}{d\log\sigma_\mu}\right| + \left|\frac{d\lambda_\mu^2}{d\log\sigma_\mu}\right|\right\}^2;\end{aligned}$$

also ist

$$m_\mu^*(\varrho', \varrho'') \leq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \sqrt{\frac{2}{\lambda_\mu^*}\left\{1 + \pi^2\left[\left|\frac{d\lambda_\mu^1}{d\log\sigma_\mu}\right| + \left|\frac{d\lambda_\mu^2}{d\log\sigma_\mu}\right|\right]^2\right\}}\cdot\sqrt{\frac{D\log z_\mu}{D\log\omega_\mu}}\cdot d\log\sigma_\mu.$$

Wir wenden die Schwarzsche Ungleichung an und erhalten

$$\{m_\mu^*(\varrho', \varrho'')\}^2 \leq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\lambda_\mu^*}\left\{1 + \pi^2\left[\left|\frac{d\lambda_\mu^1}{d\log\sigma_\mu}\right| + \left|\frac{d\lambda_\mu^2}{d\log\sigma_\mu}\right|\right]^2\right\} d\log\sigma_\mu \cdot \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{D\log z_\mu}{D\log\omega_\mu}\, d\log\sigma_\mu.$$

Integration über ψ_μ von $-\pi$ bis $+\pi$ ergibt rechts den Faktor $2\pi\, m_\mu^*(\varrho', \varrho'')$. Division durch diesen Ausdruck gibt mit $\sigma = \varrho$ schließlich

$$(14) \qquad m_\mu^*(\varrho', \varrho'') \leqq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\lambda_\mu^*(\varrho)} \left\{1 + \pi^2 \left[\left| \frac{d\lambda_\mu^1}{d \log \varrho} \right| + \left| \frac{d\lambda_\mu^2}{d \log \varrho} \right| \right]^2 \right\} d \log \varrho .$$

Benutzen wir die Relation (14) für zwei Werte ϱ_1, ϱ_2 von ϱ, so erhalten wir

$$(15) \quad M_\mu(\varrho', \varrho'') \leqq \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{2}{\lambda_\mu(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} + \left(M_\mu(\varrho', \varrho'') - m_\mu^*(\varrho_1, \varrho_2)\right) + I_\mu(\varrho_1, \varrho_2) + J_\mu(\varrho_1, \varrho_2)$$

mit

$$I_\mu(\varrho_1, \varrho_2) = 2\pi^2 \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{1}{\lambda_\mu^*(\varrho)} \left\{ \left| \frac{d\lambda_\mu^1(\varrho)}{d \log \varrho} \right| + \left| \frac{d\lambda_\mu^2(\varrho)}{d \log \varrho} \right| \right\}^2 \frac{d\varrho}{\varrho}$$

und

$$J_\mu(\varrho_1, \varrho_2) = 2 \cdot \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \left(\frac{1}{\lambda_\mu^*(\varrho)} - \frac{1}{\lambda_\mu(\varrho)} \right) \frac{d\varrho}{\varrho} .$$

Aus (15) folgt nun mit (4) die Relation

$$(16) \quad \begin{cases} M(\varrho', \varrho'') \leqq \left[\sum_{\mu=1}^{m} \{M_\mu(\varrho', \varrho'')\}^{-1} \right]^{-1} \\ \qquad\qquad \leqq \left[\sum_{\mu \in A'} \{K_\mu(\varrho_1, \varrho_2) + M_\mu(\varrho', \varrho'') - m_\mu^*(\varrho_1, \varrho_2)\}^{-1} \right]^{-1}, \end{cases}$$

wobei A' eine Teilmenge von A ist, wenn wir noch

$$K_\mu(\varrho_1, \varrho_2) = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{2}{\lambda_\mu(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} + I_\mu(\varrho_1, \varrho_2) + J_\mu(\varrho_1, \varrho_2)$$

setzen. Für $\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho) > c\, \varrho^{-\frac{1}{2}+\alpha}$ $(c > 0,\ \alpha > 0)$ ist nach (9)

$$(17) \qquad M(\varrho', \varrho'') - \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \geqq \varepsilon(\varrho') .$$

Blicken wir auf Lemma 5 und vergleichen wir (16) mit (17), so erhebt sich die Frage: Unter welchen Voraussetzungen kann die Ungleichung (16) fortgesetzt werden durch

$$(16') \quad \left[\sum_{\mu \in A'} \{K_\mu(\varrho_1, \varrho_2) + M_\mu(\varrho', \varrho'') - m_\mu^*(\varrho_1, \varrho_2)\}^{-1} \right]^{-1} \leqq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} + \varepsilon(\varrho') ,$$

wenigstens für $M(\varrho', \varrho'') \geqq K > 0$?

6.3. Dies ist möglich in verschiedenen Fällen; von besonderer Bedeutung für die weiteren Untersuchungen ist der folgende. Es sei mit $\alpha > 0$

(18a) $\lambda_\mu(\varrho) = \Lambda_\mu + O(\varrho^{-\alpha})$ mit konstantem $\Lambda_\mu > 0$ für alle μ einer Menge $A_0 < A$;

(18b) $\lambda_\mu(\varrho) = O(\varrho^{-\alpha})$ für $\mu \in A_1 = A - A_0$;

(18c) $\sum_{\mu \in A_0} \Lambda_\mu > 0$.

Für den ν-ten Grätenendpunkt $z_{\mu 1}^\nu = \varrho_{\mu 1}^\nu e^{i\pi\lambda_{\mu 1}^\nu}$ bzw. $z_{\mu 2}^\nu = \varrho_{\mu 2}^\nu e^{i\pi\lambda_{\mu 2}^\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ des rechten bzw. linken Randes von $q_\mu(Q_\mu)$ auf $\Im(\zeta_\mu) = \nu\pi i$ gelte für $\mu \in A_0$

(18d) $$\lambda_{\mu k}^\nu - \tfrac{1}{2} = a_{\mu k}(\varrho_{\mu k}^\nu)^{-\beta_{\mu k}} + O(1) \cdot (\varrho_{\mu k}^\nu)^{-\beta'_{\mu k}}, \quad k = 1, 2,$$

wo $\beta'_{\mu k} > \beta_{\mu k} \geqq 0$. Es ist wegen (18a) dann $\operatorname{Min}(\beta_{\mu 1}, \beta_{\mu 2}) = 0$. Wir wählen für b_μ^k folgende in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$\lambda_\mu^k(\varrho) - \tfrac{1}{2} = a_{\mu k}\varrho^{-\beta_{\mu k}} + a''_{\mu k}\varrho^{-\beta''_{\mu k}}$$

bei $\beta_{\mu k} < \beta''_{\mu k} < \beta'_{\mu k}$. Durch passende Wahl von $a''_{\mu k}$ werden die Bedingungen (10) erfüllt, überdies wird erreicht, daß (10b) erfüllt bleibt, wenn $q_\mu(Q_\mu)$ durch Q_μ ersetzt wird[26]).

Wir betrachten für $\mu \in A_0$ das quasikonforme q_μ^{-1}-Bild $V_\mu(\varrho', \varrho'')$ von $v_\mu(\varrho', \varrho'')$ und dazu das Gebiet $\tilde{V}_\mu(\varrho', \varrho'')$, das aus Q_μ herausgehoben wird, durch diejenigen wohlbestimmten Kreisbogenstücke auf $|\zeta_\mu| = \varrho'$ und $|\zeta_\mu| = \varrho''$, die den linken und den rechten Rand von Q_μ verbinden. $V_\mu(\varrho', \varrho'')$ entsteht nach (Q_3), (3) aus $v_\mu(\varrho', \varrho'')$ dadurch, daß die α-Mengen von $v_\mu(\varrho', \varrho'')$, also die Gräten, auf den Geraden $\Im(\zeta_\mu) = \nu\pi i$ um $O(1)$, und die β-Mengen, also die Kreisbogenstücke $B_{\varrho'}^\mu$, $B_{\varrho''}^\mu$, punktweise um $O(1)$ verschoben werden — natürlich so, daß sie zusammenhängend bleiben. Jedenfalls geht aber, unabhängig von ϱ, für hinreichend großes $c > 0$ für alle $\mu \in A_0$ das Gebiet $\tilde{V}_\mu(\varrho' - c, \varrho'' + c)$ aus $V_\mu(\varrho', \varrho'')$ hervor durch Gebietserweiterung über β-Bogen und nachträgliches Ersetzen von β-Mengen durch α-Mengen. Nach den Lemmata 1, 2 ist also der Modul $\tilde{M}_\mu(\varrho' - c, \varrho'' + c)$ von $\tilde{V}_\mu(\varrho' - c, \varrho'' + c)$ größer als $M_\mu(\varrho', \varrho'')$. Weil b_μ^k, $k = 1, 2$, auch innerhalb Q_μ liegt, ist (ebenfalls nach den Lemmata 1, 2) auch

(19) $$M_\mu(\varrho', \varrho'') \leq \tilde{M}_\mu(\varrho' - c, \varrho'' + c) \leq m_\mu^*(\varrho' - c, \varrho'' + c).$$

Es gelten für $\mu \in A_0$ mit geeignetem β, $0 < \beta < \alpha$, nach der Wahl von b_μ^k die Beziehungen $\lambda_\mu^*(\varrho) = \Lambda_\mu + O(\varrho^{-\beta})$ und $\frac{d\lambda_\mu^k}{d\log\varrho} = O(\varrho^{-\beta})$. Daher ist

$$I_\mu(\varrho' - c, \varrho'' + c) = O(1) \cdot \int_{\varrho'-c}^{\varrho''+c} \varrho^{-2\beta} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} = O(1) \cdot (\varrho' - c)^{-2\beta}\left[1 - \left(\frac{\varrho'' + c}{\varrho' - c}\right)^{-2\beta}\right]$$

und

$$J_\mu(\varrho' - c, \varrho'' + c) = O(1) \cdot \int_{\varrho'-c}^{\varrho''+c} \varrho^{-\beta} \frac{d\varrho}{\varrho} = O(1) \cdot (\varrho' - c)^{-\beta}\left[1 - \left(\frac{\varrho'' + c}{\varrho' - c}\right)^{-\beta}\right].$$

[26]) Man beachte $\mu \in A_0$ und (F_2).

Es ist daher für diese μ

$$(20)\quad K_\mu(\varrho'-c,\varrho''+c)=\frac{2}{\Lambda_\mu}\cdot\log\frac{\varrho''+c}{\varrho'-c}+O(1)\cdot(\varrho'-c)^{-\beta}\left[1-\left(\frac{\varrho''+c}{\varrho'-c}\right)^{-\beta}\right].$$

Nach (16) ist also mit $\varrho_1=\varrho'-c$, $\varrho_2=\varrho''+c$ wegen (19)

$$M(\varrho',\varrho'')\leqq\Big[\sum_{\mu\in A_0}\{K_\mu(\varrho'-c,\varrho''+c)\}^{-1}\Big]^{-1}.$$

Hieraus folgt: Notwendig dafür, daß $M(\varrho',\varrho'')\geqq K>0$ für hinreichend großes ϱ', ist nach (20) $\frac{\varrho''}{\varrho'}=L\geqq L_0$ für ein geeignetes $L_0>1$. Mit $\Lambda=\sum_{\mu\in A_0}\Lambda_\mu$ erhalten wir so für $L\geqq L_0$

$$(21)\qquad M(\varrho',\varrho'')\leqq\frac{2}{\Lambda}\log L+O(\varrho'^{-\beta}).$$

Umgekehrt ist

$$(21')\qquad \int_{\varrho'}^{\varrho''}\frac{2}{\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_\mu(\varrho)}\frac{d\varrho}{\varrho}=\int_{\varrho'}^{\varrho''}\frac{2}{\Lambda+O(\varrho^{-\alpha})}\frac{d\varrho}{\varrho}=\frac{2}{\Lambda}\log L+O(\varrho'^{-\alpha}),$$

und aus (21), (21') zusammen folgt die Richtigkeit der Fortsetzung (16') von (16) unter den Bedingungen (18).

6.4. Wir nehmen an, es sei $\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_\mu(\varrho)>c\varrho^{-\frac{1}{2}+\alpha}$ $(c>0,\ \alpha>0)$, und es gelte (16') als Fortsetzung von (16) mit geeigneten ϱ_1, ϱ_2 sobald $M(\varrho',\varrho'')\geqq K>0$ und ϱ', ϱ'' hinreichend groß; es bestehe also für diese Werte ϱ', ϱ'' die Beziehung

$$(22)\qquad M(\varrho',\varrho'')-\int_{\varrho'}^{\varrho''}\frac{2}{\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_\mu(\varrho)}\frac{d\varrho}{\varrho}=\varepsilon(\varrho').$$

Sei $w(z)$ die analytische Funktion, die W als Bild der punktierten Ebene[27] $|z|<\infty$ erzeugt. $B_{\varrho,z}$ sei in der z-Ebene das Urbild der geschlossenen Kurve $B_{\varrho,w}$. Nach Lemma 5 erschließen wir mit einer Konstanten $C>0$ aus (22) die Beziehung

$$(23)\quad u_j(\varrho)=C\,e^{f(\varrho)}\,(1+\varepsilon(\varrho))\quad\text{mit}\quad f(\varrho)=\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{2}{\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_\mu(\varrho)}\frac{d\varrho}{\varrho},\quad j=1,2,$$

wo $u_1(\varrho)=\operatorname{Min}_{B_{\varrho,z}}|z|$, $u_2(\varrho)=\operatorname{Max}_{B_{\varrho,z}}|z|$ und ϱ_0 eine feste genügend große Zahl ist.

Die Funktion $u_j(\varrho)$ ist eigentlich monoton und stückweise stetig [sie ist möglicherweise unstetig an einer Unstetigkeitsstelle eines $\lambda_\mu(\varrho)$]. Wir definieren daher neben $u_j(\varrho)$ die Funktion $\bar{u}_j(\varrho)$: sie soll mit $u_j(\varrho)$ bis auf die Sprungstellen übereinstimmen, an diesen soll sie jedoch alle Werte zwischen

[27] Vgl. Satz 1.

den Sprungordinaten, diese eingeschlossen, annehmen. Die (eindeutige) Umkehrfunktion $\varrho_j(r)$ von $\overline{u}_j(\varrho)$ bezeichnen wir kurz als *Umkehrfunktion von* $u_j(\varrho)$. $\varrho_j(r)$ ist insbesondere stetig. Es ist

$$u_j(\varrho_j(r)-0) \leq r \leq u_j(\varrho_j(r)+0). \tag{24}$$

Aus (23) folgt nun

$$f(\varrho_1(r)) - f(\varrho_2(r)) = \varepsilon(r). \tag{25}$$

Wir bemerken ferner [wegen $\lambda_\mu \leq 1$]

$$df(\varrho) \geq \frac{2}{m}\, d\log\varrho; \tag{26}$$

aus (25) folgt also

$$\frac{\varrho_1(r)}{\varrho_2(r)} = 1 + \varepsilon(r). \tag{27}$$

6.5. Man bezeichnet mit $n(r, a)$ die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten a-Stellen von $w(z)$ im Kreis $|z|<r$; $n_1(r, a)$ zählt eine λ-fache a-Stelle nur $\lambda-1$ mal. Die Anzahl der a-Stellen innerhalb $B_{\varrho,z}$ wollen wir mit $\nu(\varrho, a)$ bezeichnen und entsprechend die λ-fachen a-Stellen innerhalb dieser Kurve $\lambda-1$ mal mit $\nu_1(\varrho, a)$ zählen. Die bezüglich $B_{\varrho,z}$ bestimmten Anzahlfunktionen entnimmt man aus der Anzahl der verschiedenen [in Q_μ auf Parallelen zur imaginären Achse im Abstand 2π liegenden] Werte $\zeta^{(\mu)}(a)$ in den einzelnen Halbebenen E_μ, die nach der Transformation q_μ innerhalb B_ϱ^μ liegen, d.h. durch B_ϱ^μ von den in $q_\mu(Q_\mu)$ auf der Geraden $\Im(\zeta_\mu) = [\varrho+1]$ liegenden Punkten getrennt werden [Werte von $q_\mu\zeta^{(\mu)}(a)$ auf dem Rand von $q_\mu(Q_\mu)$ sind dabei nur halb so oft zu zählen]. Es sei nämlich $\nu^{(\mu)}(\varrho, a)$ bzw. $\nu_1^{(\mu)}(\varrho, a)$ die Anzahl der λ-fach bzw. $\overline{\lambda-1}$-fach gezählten a-Stellen mit Bildern in $q_\mu(Q_\mu)$ innerhalb B_ϱ^μ, $\tilde{\nu}^{(\mu)}(\varrho, a)$ bzw. $\tilde{\nu}_1^{(\mu)}(\varrho, a)$ dieselbe Anzahl mit $\zeta^{(\mu)}$-Bildern in Q_μ innerhalb $\tilde{B}_\varrho^\mu$. Aus (Q_3) [für $f_\mu \in H$], (Q_4) [für $f_\mu \in G$] und (3) erschließt man die Existenz einer Zahl $c>0$, so daß für alle μ die Beziehungen

$$\begin{cases} \tilde{\nu}^{(\mu)}(\varrho+c, a) \geq \nu^{(\mu)}(\varrho, a), & \nu^{(\mu)}(\varrho+c, a) \geq \tilde{\nu}^{(\mu)}(\varrho, a) \\ \tilde{\nu}_1^{(\mu)}(\varrho+c, a) \geq \nu_1^{(\mu)}(\varrho, a), & \nu_1^{(\mu)}(\varrho+c, a) \geq \tilde{\nu}_1^{(\mu)}(\varrho, a) \end{cases} \tag{28}$$

gelten [vgl. die analoge Überlegung auf S. 259]. Es sei $\nu^{(\mu)}(\varrho)$ die halbe Anzahl der Streifen $(\nu-1)\pi \leq \Im(\zeta_\mu) \leq \nu\pi$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, die schon Punkte innerhalb B_ϱ^μ enthalten; dann ist für nicht-reelles a_0

$$\nu^{(\mu)}(\varrho) = \nu^{(\mu)}(\varrho, a_0) + O(1).$$

Weil $\nu^{(\mu)}(\varrho, a) = O(\varrho)$ gleichmäßig in a gilt, ist daher

$$\nu(\varrho) = \sum_{\mu=1}^{m} \nu^{(\mu)}(\varrho) = \max_a \nu(\varrho, a) + O(1) = O(\varrho). \tag{29}$$

Die nach $\log r$ bzw. $f(\varrho)$ integrierten Anzahlen werden mit dem entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet, so daß mit festen r_0, ϱ_0 gilt

$$N(r,a)=\int_{r_0}^{r} n(r,a)\frac{dr}{r}, \qquad N_1(r,a)=\int_{r_0}^{r} n_1(r,a)\frac{dr}{r}$$

$$\mathsf{N}(\varrho,a)=\int_{\varrho_0}^{\varrho} \nu(\varrho,a)\,df(\varrho), \qquad \mathsf{N}_1(\varrho,a)=\int_{\varrho_0}^{\varrho} \nu_1(\varrho,a)\,df(\varrho).$$

Wir setzen ferner

$$N(r)=\operatorname*{Max}_a N(r,a), \qquad \mathsf{N}(\varrho)=\int_{\varrho_0}^{\varrho} \nu(\varrho)\,df(\varrho).$$

Zwischen den „lateinischen" und den „griechischen" Anzahlen bestehen nach der Definition der Umkehrfunktionen $\varrho_j(r)$ und $u_j(\varrho)$ die Beziehungen

$$(30)\qquad \begin{cases} \nu\left(\varrho_2(r)-0,a\right)\leq n(r,a)\leq \nu\left(\varrho_1(r)+0,a\right) \\ \nu_1\left(\varrho_2(r)-0,a\right)\leq n_1(r,a)\leq \nu_1\left(\varrho_1(r)+0,a\right). \end{cases}$$

Wir fordern, es sei für jedes $K>0$ und für ein $\gamma>0$

$$(31)\qquad \lim\frac{\nu(\varrho+K)}{\nu(\varrho)}=1, \qquad \overline{\lim}\,\frac{\nu(\varrho+\gamma\varrho)}{\nu(\varrho)}<\infty;$$

[hieraus folgt insbesondere

$$(32)\qquad \overline{\lim}\,\frac{\nu(\varrho)}{\mathsf{N}(\varrho)}<\infty.]$$

Dann können Ordnung, Typus, die Defekte und die Indizes der algebraischen Verzweigtheit für die Funktion $w(z)$ sogleich bestimmt werden.

6.6. Als (obere) Wachstumsordnung s^* bzw. als untere Wachstumsordnung s_* bezeichnet man die Limites

$$s^*=\overline{\lim}\,\frac{\log T(r,w)}{\log r}, \qquad s_*=\underline{\lim}\,\frac{\log T(r,w)}{\log r};$$

$T(r,w)$ ist dabei die Charakteristik der meromorphen Funktion $w(z)$. Der obere bzw. untere Wachstumstypus der oberen bzw. unteren Ordnung heißt maximal, normal (mittel) oder minimal, je nachdem

$$\overline{\lim}\,\frac{T(r,w)}{r^{s^*}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\lim}\,\frac{T(r,w)}{r^{s_*}}$$

unendlich, positiv endlich oder Null ist. Es ist hier das Wachstum der Charakteristik $T(r,w)$ gleich dem von $N(r)$; denn nach dem Satz von COLLINGWOOD-TEICHMÜLLER[28]) gilt hier für jede nicht-reelle Zahl a_0 die Gleichung

$$T(r,w)=N(r,a_0)+O(1)=N(r)+O(1).$$

Der Defekt $\delta(a)$ eines Wertes a ist definiert durch

$$\delta(a)=1-\overline{\lim}\,\frac{N(r,a)}{T(r,w)},$$

[28]) Siehe z. B. TEICHMÜLLER [18].

der Index der algebraischen Verzweigtheit $\vartheta(a)$ durch

$$\vartheta(a) = \underline{\lim} \frac{N_1(r, a)}{T(r, w)}.$$

Mit der Beziehung (24), [in der für gewisse r links und für gewisse r rechts Gleichheit herrscht] und mit (30) erhalten wir wegen der Monotonie von $\nu(\varrho, a)$ für nichtreelles a_0

$$O(1) + \int_{\varrho_0}^{\varrho_2(r)-0} \nu(\varrho - 0, a_0)\, d \log u_2(\varrho) \leqq \int_{r_0}^{r} n(r, a_0)\, d \log r$$
$$= N(r, a_0) \leqq \int_{\varrho_0}^{\varrho_1(r)+0} \nu(\varrho + 0, a_0)\, d \log u_1(\varrho) + O(1)$$

und hieraus nach (23)

$$\varepsilon(r) \cdot \nu(\varrho_2(r) - 0, a_0) + \int_{\varrho_0}^{\varrho_2(r)} \nu(\varrho, a_0)\, df(\varrho) \leqq N(r, a_0)$$
$$= N(r) + O(1) \leqq \int_{\varrho_0}^{\varrho_1(r)} \nu(\varrho, a_0)\, df(\varrho) + \varepsilon(r)\, \nu(\varrho_1(r) + 0, a_0).$$

Mit (25), (27), (29), (31), (32) folgt nun

$$N(r) = \mathsf{N}(\varrho_1(r))\,[1 + \varepsilon(r)] = \mathsf{N}(\varrho_2(r))\,[1 + \varepsilon(r)], \tag{33}$$

mit (24) ist also

$$\frac{\log \mathsf{N}(\varrho_1(r)) + \varepsilon(r)}{\log u_1(\varrho_1(r) + 0)} \leqq \frac{\log N(r)}{\log r} \leqq \frac{\log \mathsf{N}(\varrho_2(r)) + \varepsilon(r)}{\log u_2(\varrho_2(r) - 0)}.$$

Nach (23) folgt

$$\overline{\lim} \frac{\log \mathsf{N}(\varrho)}{f(\varrho)} = \overline{\lim} \frac{\log N(r)}{\log r} = s^*, \tag{34*}$$

$$\underline{\lim} \frac{\log \mathsf{N}(\varrho)}{f(\varrho)} = \underline{\lim} \frac{\log N(r)}{\log r} = s_*. \tag{34$_*$}$$

Man schließt genau so (mit reellem s)

$$\frac{\mathsf{N}(\varrho_1(r))\,[1 + \varepsilon(r)]}{[u_1(\varrho_1(r) + 0)]^s} \leqq \frac{N(r)}{r^s} \leqq \frac{\mathsf{N}(\varrho_2(r))\,[1 + \varepsilon(r)]}{[u_2(\varrho_2(r) - 0)]^s},$$

und daraus auf den oberen bzw. unteren Maximal-, Normal- (Mittel-) oder Minimaltypus der oberen bzw. unteren Ordnung, je nachdem die Limites

$$\overline{\lim} \frac{\mathsf{N}(\varrho)}{e^{s^* f(\varrho)}} = \overline{\lim} \frac{N(r)}{r^{s^*}} \cdot C^{s^*} \tag{35*}$$

bzw.

$$\underline{\lim} \frac{\mathsf{N}(\varrho)}{e^{s_* f(\varrho)}} = \underline{\lim} \frac{N(r)}{r^{s_*}} \cdot C^{s_*} \tag{35$_*$}$$

unendlich, positiv endlich oder Null sind. Gilt über (31) hinaus noch für jedes $K > 0$

$$\lim \frac{\nu(\varrho + K, a)}{\nu(\varrho, a)} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim \frac{\nu_1(\varrho + K, a)}{\nu_1(\varrho, a)} = 1 \tag{36}$$

und für ein $\gamma > 0$

$$\overline{\lim} \frac{\nu(\varrho+\gamma\varrho, a)}{\nu(\varrho, a)} < \infty \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim} \frac{\nu_1(\varrho+\gamma\varrho, a)}{\nu_1(\varrho, a)} < \infty, \tag{36'}$$

so folgt ganz ähnlich

$$\frac{N(r, a)}{N(r)} = \frac{\mathsf{N}(\varrho_1(r), a)}{\mathsf{N}(\varrho_1(r))}(1+\varepsilon(r)) = \frac{\mathsf{N}(\varrho_2(r), a)}{\mathsf{N}(\varrho_2(r))}(1+\varepsilon(r))$$

bzw.

$$\frac{N_1(r, a)}{N(r)} = \frac{\mathsf{N}_1(\varrho_1(r), a)}{\mathsf{N}(\varrho_1(r))}(1+\varepsilon(r)) = \frac{\mathsf{N}_1(\varrho_2(r), a)}{\mathsf{N}(\varrho_2(r))}(1+\varepsilon(r)),$$

und hieraus ergibt sich für den Defekt $\delta(a)$ bzw. den Verzweigungsindex $\vartheta(a)$ die Formel

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim} \frac{\mathsf{N}(\varrho, a)}{\mathsf{N}(\varrho)} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta(a) = \underline{\lim} \frac{\mathsf{N}_1(\varrho, a)}{\mathsf{N}(\varrho)}. \tag{37}$$

Mit

$$\begin{aligned} N(r, a) &\leqq \int_{\varrho_0}^{\varrho_1(r)+0} \nu(\varrho+0, a)\, d\log u_1(\varrho) + O(1) \\ &= \mathsf{N}(\varrho_1(r), a) + \varepsilon(r)\,[\mathsf{N}(\varrho_1(r), a) + \nu(\varrho_1(r)+0, a)], \\ N(r, a) &\geqq \int_{\varrho_0}^{\varrho_2(r)-0} \nu(\varrho-0, a)\, d\log u_2(\varrho) + O(1) \\ &= \mathsf{N}(\varrho_2(r), a) + \varepsilon(r)\,[N(\varrho_2(r), a) + \nu(\varrho_2(r)-0, a)] \end{aligned}$$

und der ähnlich gewonnenen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\mathsf{N}_1(\varrho_2(r), a) + \varepsilon(r)\,[\mathsf{N}_1(\varrho_2(r), a) + \nu(\varrho_2(r)-0, a)] \\ &\qquad \leqq N_1(r, a) \leqq \mathsf{N}_1(\varrho_1(r)) + \varepsilon(r)\,[\mathsf{N}(\varrho_1(r), a) + \nu(\varrho_1(r)+0, a)] \end{aligned}$$

erschließt man aus (33) aber jedenfalls [ohne Verwendung von (36), (36')] die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(a) = 1 - \overline{\lim} \dfrac{\mathsf{N}(\varrho, a) + \varepsilon(\varrho)\cdot\nu(\varrho+0, a)}{\mathsf{N}(\varrho)} \\ \text{und} \\ \vartheta(a) = \underline{\lim} \dfrac{\mathsf{N}_1(\varrho, a) + \varepsilon(\varrho)\cdot\nu_1(\varrho+0, a)}{\mathsf{N}(\varrho)}. \end{array} \right. \tag{38}$$

6.7. Wir fassen — unter Verwendung der Tatsache, daß $\nu^{(\mu)}(\varrho) = O(\varrho)$, aber daß für $f_\mu \in G$ jedoch $\nu^{(\mu)}(\varrho) = O(1)$ und $\lambda_\mu(\varrho) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ ist, und daß alle mehrfachen a-Stellen genau doppelte a-Stellen sind — die Ergebnisse zusammen im

Satz 2. *Es erzeuge $w(z)$ eine* RIEMANNsche *Fläche $W \in \mathfrak{W}$. Die Fläche werde nach § 3 zerschnitten und jedes ausfallende Flächenstück $f_{\mu_\tau} \in H$ ($\tau = 1, 2, \ldots, t$) werde durch $\zeta^{(\mu_\tau)} = \log \dfrac{w - w'_{\mu_\tau}}{w - w''_{\mu_\tau}} + i\gamma^{(\mu_\tau)}$ in die Grätenfigur Q_{μ_τ} der oberen Halbebene $\Im(\zeta_{\mu_\tau}) > 0$ abgebildet; hierbei sei w'_{μ_τ} bzw. w''_{μ_τ} die Koordinate*

des linken bzw. rechten Nachbargebietes der zu f_{μ_τ} gehörigen Knotenfolge im Streckenkomplex. Mit den durch (Q_1) bis (Q_4) bestimmten Transformationen q_{μ_τ} sei $B_\varrho^{\mu_\tau}$ das Stück des Kreisbogens $|\zeta_{\mu_\tau}| = \varrho$, das den rechten und den linken Rand von $q_{\mu_\tau}(Q_{\mu_\tau})$ verbindet, die Länge von $B_\varrho^{\mu_\tau}$ sei $\pi\lambda_{\mu_\tau}(\varrho)\cdot\varrho$. Es sei $\nu^{(\mu_\tau)}(\varrho)$ die halbe Anzahl der Streifen $(\nu-1)\pi \leqq \Im(\zeta_{\mu_\tau}) \leqq \nu\pi$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, die schon Punkte innerhalb $B_\varrho^{\mu_\tau}$ enthalten; es werde gesetzt

$$(39)\qquad f(\varrho) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{2}{\sum_{\tau=1}^{t} \lambda_{\mu_\tau}(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \nu(\varrho) = \sum_{\tau=1}^{t} \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho), \quad \mathsf{N}(\varrho) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \nu(\varrho)\, df(\varrho).$$

a) *Wenn dann* $\sum_{\tau=1}^{t} \lambda_{\mu_\tau}(\varrho) > c\varrho^{-\frac{1}{2}+\alpha}$ *ist, mit* $c>0$ *und* $\alpha>0$, *wenn ferner für jedes* $K>0$ *und ein* $\gamma>0$ *gilt*

$$(31)\qquad \lim \frac{\nu(\varrho+K)}{\nu(\varrho)} = 1, \quad \overline{\lim} \frac{\nu(\varrho+\gamma\varrho)}{\nu(\varrho)} < \infty,$$

und wenn die Ungleichung (16) *durch* (16′) *fortgesetzt werden kann, so sind obere bzw. untere Ordnung von* $w(z)$ *gegeben durch*

$$s^* = \overline{\lim} \frac{\log \mathsf{N}(\varrho)}{f(\varrho)} \quad bzw. \quad s_* = \underline{\lim} \frac{\log \mathsf{N}(\varrho)}{f(\varrho)}.$$

Der obere bzw. untere Wachstumstypus zur oberen Ordnung s^* *bzw. zur unteren Ordnung* s_* *ist maximal, normal (mittel) oder minimal, je nachdem der Wert von*

$$\overline{\lim} \frac{\mathsf{N}(\varrho)}{e^{s^* f(\varrho)}} \quad bzw. \quad \underline{\lim} \frac{\mathsf{N}(\varrho)}{e^{s_* f(\varrho)}}$$

unendlich, positiv endlich oder Null ist.

b) *Bezeichnen wir dazu mit* $\nu(\varrho, a)$ *bzw.* $\nu_1(\varrho, a)$ *die Gesamtanzahl der a-Stellen überhaupt bzw. der mehrfachen a-Stellen, deren* $q_{\mu_\tau}\zeta^{(\mu_\tau)}$*-Bilder in irgendeinem* $q_{\mu_\tau}(Q_{\mu_\tau})$ *schon innerhalb* $B_\varrho^{(\mu_\tau)}$ *liegen [wobei Bilder auf dem Rand eines* $q_{\mu_\tau}(Q_{\mu_\tau})$ *nur halb zu zählen sind] und gilt außerdem für alle* $K>0$ *und ein geeignetes* $\gamma>0$

$$(36)\qquad \lim \frac{\nu(\varrho+K, a)}{\nu(\varrho, a)} = 1 \quad bzw. \quad \lim \frac{\nu_1(\varrho+K, a)}{\nu(\varrho)} = 1$$

sowie

$$(36')\qquad \overline{\lim} \frac{\nu(\varrho+\gamma\varrho, a)}{\nu(\varrho, a)} < \infty \quad bzw. \quad \overline{\lim} \frac{\nu_1(\varrho+\gamma\varrho, a)}{\nu_1(\varrho, a)} < \infty,$$

so ist der Defekt $\delta(a)$ *und der Index der algebraischen Verzweigtheit* $\vartheta(a)$ *gegeben durch*

$$(37)\qquad \delta(a) = 1 - \overline{\lim} \frac{\mathsf{N}(\varrho, a)}{\mathsf{N}(\varrho)} \quad bzw. \quad \vartheta(a) = \underline{\lim} \frac{\mathsf{N}_1(\varrho, a)}{\mathsf{N}(\varrho)},$$

wo

$$\mathsf{N}(\varrho, a) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \nu(\varrho, a)\, df(\varrho) \quad und \quad \mathsf{N}_1(\varrho, a) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \nu_1(\varrho, a)\, df(\varrho).$$

Jedenfalls aber gelten die Gleichungen

$$(38)\qquad \begin{cases} \delta(a) = 1 - \overline{\lim} \dfrac{\mathsf{N}(\varrho, a) + \varepsilon(\varrho) \cdot v(\varrho + 0, a)}{\mathsf{N}(\varrho)} \\ \text{und} \\ \vartheta(a) = \underline{\lim} \dfrac{\mathsf{N}_1(\varrho, a) + \varepsilon(\varrho) \cdot v_1(\varrho + 0, a)}{\mathsf{N}(\varrho)}. \end{cases}$$

Satz 2 erlaubt, die Wertverteilung der Funktion $w(z)$ allein aus der Struktur der erzeugten RIEMANNschen Fläche zu entnehmen; wir bemerken, daß die Voraussetzungen des Satzes 2a) für die Flächen erfüllt sind, die den Bedingungen (18) genügen. Der Satz kann in folgender prägnanter Form ausgesprochen werden: *Die Voraussetzungen des Satzes erlauben, die „lateinischen" Anzahlfunktionen durch die „griechischen" zu ersetzen.*

Neben Satz 2 besteht

Satz 3. *Gilt mit den Bezeichnungen von Satz 2 die Gleichung* $\lim \sum_{\tau=1}^{t} \lambda_{\mu_\tau}(\varrho) = 0$, *so wird W von einer meromorphen Funktion der Ordnung Null erzeugt.*

Satz 3 wird in § 9 bewiesen.

§ 7. Die Stärke von Randstellen

Eine in einem Sinusende E einer RIEMANNschen Fläche vorliegende Konvergenz der Koordinaten der Windungspunkte beeinflußt das Wachstum der erzeugenden Funktion in entgegengesetzter Weise, je nachdem der Hüllenkern $kh(E)$ des Endes aus einem Punkt oder aus der punktierten reellen Achse besteht. Im ersten Fall trägt E eine (relativ mittelbare) Randstelle[29]), wir nennen E daher ein *randstelletragendes Ende*; im anderen Fall verschmelzen die beiden den benachbarten Randgebieten zugehörigen Relativ-Randstellen (die — zunächst einmal vorhanden sind und — notwendig über derselben Koordinate liegen) zu einer einzigen Randstelle[30]), wir nennen E dann ein *verschmelzendes Ende*. Wie sich zeigen wird, hat ein Verschmelzen von Randstellen die Tendenz, das Wachstum zu mindern, während das Auftreten von neuen Randstellen eher das Wachstum fördert. Ein Beispiel für verschmelzende und für randstelletragende Sinusenden gibt Fig. 3.

In diesem Paragraphen bedeute α eine Zahl > 0, aber nicht notwendig immer dieselbe. Um die Stärke einer Randstelle über a zu definieren, normieren wir auf $a = \infty$ als Konvergenzkoordinate eines verschmelzenden oder eines randstelletragenden Sinusendes; das bedeutet offensichtlich nur eine Vereinfachung der Schreibarbeit.

Definition 1. Ein randstelletragendes Sinusende einer Fläche $W \in \mathfrak{W}$, in dem die Koordinaten a_n der Windungspunkte gegen ∞ konvergieren, trägt

[29]) Dies zeigt auch Satz 2 in [7].

[30]) Dies zeigt auch Satz 3 in [7].

eine (relativ mittelbare) Randstelle der *Konvergenz-* oder *Relativstärke* $p \geqq 0$, wenn gilt

$$\log|a_n| = pn + O(n^{1-\alpha}), \tag{40}$$

und der *Stärke* ∞, wenn gilt

$$n^{1+\alpha} = O(\log|a_n|). \tag{40'}$$

Definition 2. Eine Relativ-Randstelle, die einem logarithmischen Elementargebiet entspricht, hat die Konvergenz- oder Relativstärke ∞.

Definition 3. Ein verschmelzendes Sinusende einer Fläche $W \in \mathfrak{W}$ in dem die Koordinaten a_n der Windungspunkte gegen ∞ konvergieren, hat die *Verschmelzungsstärke* $p \geqq 0$, wenn gilt

$$\log|a_n| = pn + O(n^{1-\alpha}), \tag{41}$$

es hat die *Verschmelzungsstärke* ∞, wenn gilt

$$n^{1+\alpha} = O(\log|a_n|). \tag{41'}$$

Definition 4. Ein Sinusende der Koordinate ∞, in dem die Koordinaten der Windungspunkte nicht konvergieren, während aber (40) mit $p = 0$ gilt, werde als *Ende der Stärke Null* bezeichnet.

Wir betrachten eine Halbebene E_μ, in die ein Flächenstück h_b^0 durch $\zeta^{(\mu)}(w)$ abgebildet sei, h_b habe das Sinusende im linken Teil. Ist E ein randstelletragendes Ende der Stärke p $(0 \leqq p \leqq \infty)$, so ist die Koordinate z_μ^n des n-ten Grätenendpunktes gegeben durch

$$\begin{cases} z_\mu^n = -pn + O(n^{1-\alpha}) + n\pi i & \text{für} \quad p \neq \infty, \\ z_\mu^n = -\gamma_n \cdot n^{1+\alpha} + n\pi i & \text{mit} \quad \underline{\lim}\,\gamma_n > 0 \quad \text{für} \quad p = \infty. \end{cases} \tag{42}$$

Ist E ein verschmelzendes Ende der Stärke p, so ist

$$\begin{cases} z_\mu^n = pn + O(n^{1-\alpha}) + n\pi i & \text{für} \quad p \neq \infty \\ z_\mu^n = \gamma_n \cdot n^{1+\alpha} + n\pi i & \text{mit} \quad \underline{\lim}\,\gamma_n > 0 \quad \text{für} \quad p = \infty. \end{cases} \tag{42'}$$

Die Gln. (42), (42') gelten nach (Q_3), (3) sowohl vor wie nach der quasikonformen Abbildung q_μ. Demgemäß gilt für $\lambda_\mu(\varrho)$ die Beziehung

$$\lambda_\mu(\varrho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{\pi} + O(\varrho^{-\alpha}) \quad \text{beim randstelletragenden Sinusende,} \tag{43}$$

$$\lambda_\mu(\varrho) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{p} + O(\varrho^{-\alpha}) \quad \text{beim verschmelzenden Sinusende} \tag{43'}$$

sowohl für endliches wie unendliches p, wenn die Formeln im letzten Fall im limes $p \to \infty$ verstanden werden; für $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $0 \leqq x \leqq \infty$ ist der Hauptwert $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ zu nehmen.

Bei der Abbildung eines h_a^0 in E_μ gilt $\lambda_\mu(\varrho) \equiv 1$; es bleibt also mit Definition 2 die Beziehung (43) gültig, wenn ein logarithmisches Elementargebiet an Stelle des randstelletragenden Sinusendes tritt.

Wird ein Flächenstück h_c^0 durch $\zeta^{(\mu)}(w)$ in E_μ abgebildet, so können folgende zwei Fälle auftreten, wenn die Koordinaten der Windungspunkte in den beiden benachbarten Sinusenden der zugehörigen Knotenfolge überhaupt konvergieren:

a) beide Sinusenden sind randstelletragend,

b) eines ist verschmelzend, das andere randstelletragend [dann sind beide Konvergenzkoordinaten gleich].

Seien im Fall a) die Stärken der (relativ mittelbaren) Randstellen p' und p''; dann ist

$$\lambda_\mu(\varrho) = \frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{p'}{\pi} + \operatorname{arc\,tg}\frac{p''}{\pi}\right\} + O(\varrho^{-\alpha}). \tag{44}$$

Sei im Fall b) die Verschmelzungsstärke des einen Endes p', die Konvergenzstärke des anderen p'' [dann ist notwendig entweder $p' < p''$ oder, wenn $p' = p''$, das zum verschmelzenden Ende gehörige O-Glied kleiner als das zum randstelletragenden gehörige]. Man findet

$$\begin{cases} \lambda_\mu(\varrho) = \dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\pi}{p'} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\pi}{p''}\right) + O(\varrho^{-\alpha}) \\ \qquad = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\pi(p''-p')}{\pi^2 + p'p''} + O(\varrho^{-\alpha}). \end{cases} \tag{44'}$$

Für $p' = p$, $p'' = \infty$ gehen (44), (44') in (43), (43') über. Der Fall, daß die Koordinaten der algebraischen Windungspunkte in einem oder in beiden Enden überhaupt nicht konvergieren, ist in den oben genannten Fällen a), b) als ausgearteter Fall mit $p' = 0$, $p'' = 0$ enthalten.

Die RIEMANNschen Flächen $W \in \mathfrak{W}$, deren Sinusenden nach den Definitionen 1, 3, 4 eine wohlbestimmte Stärke haben, fassen wir zur Klasse $\mathfrak{R}$ zusammen; nach einer Bemerkung auf S. 266 sind für sie die Voraussetzungen des Satzes 2a) erfüllt, wenn der (existierende) $\lim \sum \lambda_\mu(\varrho) > 0$ ist [denn für sie sind offenbar die Formeln (18) erfüllt]; ist hingegen $\lim \sum \lambda_\mu(\varrho) = 0$, so tritt Satz 3 ein.

Jedem logarithmischen Elementargebiet und jedem randstelletragenden Sinusende einer Fläche $W \in \mathfrak{R}$ ist genau eine Randstelle von W zugeordnet. Sind zwei derartige Randgebiete im Streckenkomplex durch ein verschmelzendes Sinusende getrennt, so ist beiden dieselbe Randstelle von W zugeordnet: in sie sind die zwei Relativ-Randstellen verschmolzen, die den beiden Randgebieten entsprechen. Die Anzahl der Randstellen von W ist somit gleich der Zahl der logarithmischen Elementargebiete und randstelletragenden Sinusenden vermindert um die Zahl der verschmelzenden Sinusenden, wenn das Ergebnis positiv ist, sonst gleich Eins oder Null, je nachdem ob es überhaupt ein logarithmisches Elementargebiet oder randstelletragendes Sinusende im Streckenkomplex gibt oder nicht[31]).

Wir betrachten eine Randstelle $\mathfrak{r}$ über a, sie sei entstanden durch Verschmelzen von $k \geqq 1$ mittelbaren und unmittelbaren Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\varkappa$ der

[31]) Für diesen Sachverhalt vgl. auch [7], insbesondere die Sätze 2, 3 dort, ebenso die folgende Fußnote 32.

Relativstärken $p_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$); sie seien der Reihe nach numeriert, wie die zugehörigen Randgebiete im Streckenkomplex aufeinander folgen. Zwei aufeinanderfolgende $\mathfrak{r}_\varkappa$, $\mathfrak{r}_{\varkappa+1}$ ($1 \leqq \varkappa \leqq k-1$) seien durch ein Sinusende der Verschmelzungsstärke $p_{\varkappa,\varkappa+1}$ verschmolzen — wie bereits bemerkt, ist $p_{\varkappa,\varkappa+1} \leqq$ Min $(p_\varkappa, p_{\varkappa+1})$. Ehe wir nun die Gesamtstärke der Randstelle $\mathfrak{r}$ bestimmen, mögen zwei Fälle auseinandergehalten werden, der Fall der zerfällbaren und der der unzerfällbaren Flächen[32]). Ist die Fläche unzerfällbar, so ist die letzte Relativ-Randstelle $\mathfrak{r}_k$ mit der ersten $\mathfrak{r}_1$ durch ein Sinusende verschmolzen, es habe die Verschmelzungsstärke $p_{k,1}$; so gibt es k verschmelzende Sinusenden. Ist die Fläche zerfällbar, so sind die erste und die k-te Relativ-Randstelle nicht miteinander verschmolzen, es gibt alsdann nur $k-1$ verschmelzende Sinusenden in diesem Teil des Komplexes. Dieser letzte Fall tritt immer dann ein, wenn es wenigstens zwei verschiedene Randstellen oder einen logarithmischen Windungspunkt auf der Fläche W gibt. Der von der Randstelle $\mathfrak{r}$ herrührende Beitrag $\lambda^{\mathfrak{r}}(\varrho)$ zu $\sum \lambda_\mu(\varrho)$ ist dann gegeben durch $\sum_{\tau=1}^{t} \lambda^{\mathfrak{r}}_{\mu_\tau}(\varrho)$, wo $\pi \lambda^{\mathfrak{r}}_{\mu_\tau}(\varrho) \cdot \varrho$ die Länge desjenigen Teilbogens von $B^{\mu_\tau}_\varrho$ in der Viertelebene $\Im(\zeta_{\mu_\tau}) > 0$, $\Re(\zeta_{\mu_\tau}) \geqq 0$ oder $\Re(\zeta_{\mu_\tau}) \leqq 0$, für $f_{\mu_\tau} \in H$ ist, in deren Urbild auf W die Randstelle $\mathfrak{r}$ erreichbar ist. Danach ist

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda^{\mathfrak{r}}(\varrho) &= \lambda^{\mathfrak{r}}(p_1, p_k) + \frac{1}{\pi} \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi(p_\varkappa - p_{\varkappa,\varkappa+1})}{\pi^2 + p_\varkappa p_{\varkappa,\varkappa+1}} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{\varkappa=2}^{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi(p_\varkappa - p_{\varkappa-1,\varkappa})}{\pi^2 + p_\varkappa p_{\varkappa-1,\varkappa}} + O(\varrho^{-\alpha}) = \lambda_{\mathfrak{r}} + O(\varrho^{-\alpha}), \end{aligned} \right.$$

dabei sei $\lambda_{\mathfrak{r}} = \lim \lambda^{\mathfrak{r}}(\varrho)$ und

$$(45')\quad \lambda^{\mathfrak{r}}(p_1, p_k) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{p_1}{\pi} + \operatorname{arc\,tg} \frac{p_k}{\pi}\right), \qquad \text{wenn } W \text{ zerfällbar},$$

$$(45'')\quad \lambda^{\mathfrak{r}}(p_1, p_k) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\pi(p_1 - p_{k,1})}{\pi^2 + p_1 p_{k,1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi(p_k - p_{k,1})}{\pi^2 + p_k p_{k,1}}\right)$$

wenn W unzerfällbar[33]).

Für unendliche Zahlen $p_\varkappa$, $p_{\varkappa,\varkappa+1}$ ($\varkappa \bmod k$) ist hier und im folgenden stets der Grenzwert der Ausdrücke zu verstehen, wenn $p_\varkappa$, $p_{\varkappa,\varkappa+1}$ gegen Unendlich

---

[32]) Eine Fläche heißt zerfällbar, wenn sie bei der Zerschneidung durch Ausstanzen über einer geeigneten geschlossenen doppelpunktfreien Kurve in wenigstens zwei unendlich vielblättrige Flächenstücke zerfällt. Ullrich [24] bemerkte die Bedeutung der Fallunterscheidung. Die Unzerfällbarkeit hat für eine Fläche $W \in \mathfrak{R}$ zur Folge, daß entweder keinem Randgebiet des Streckenkomplexes eine Randstelle entspricht, oder daß die Randgebiete des Streckenkomplexes von W, denen Randstellen entsprechen, alle dieselbe Koordinate haben, und daß alle anderen Randgebiete verschmelzende Sinusenden sind; insbesondere können Randstellen mit sich selbst verschmelzen (vgl. [5]).

[33]) Formal geht durch $p_{k,1} = 0$ die Formel (45′) aus (45″) hervor, also sozusagen durch Aufhören der Unzerfällbarkeit.

streben. Wir bemerken

$$\sum \lambda^{\mathfrak{r}}(\varrho) = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho) + O(\varrho^{-\alpha}), \tag{46}$$

wobei die erste Summe über alle Randstellen der Fläche W zu erstrecken ist und m die Anzahl aller Flächenstücke $f_\mu \in G \cup H$ [oder $f_{\mu\tau} \in H$] ist, die bei der Zerschneidung der Fläche ausfallen: denn wenn die Länge des Stückes von B_ϱ^μ, das in der Viertelebene $\Im(\zeta_\mu) > 0$, $\Re(\zeta_\mu) \geqq 0$ oder $\Re(\zeta_\mu) \leqq 0$ nicht $O(\varrho^\alpha)$ ist, so ist in dem Urbild der Viertelebene gewiß eine Randstelle von W erreichbar.

Definition 5. Die durch die Formeln (45) gegebene Größe $\lambda_{\mathfrak{r}}$ ist die *Wachstumsstärke* der Randstelle $\mathfrak{r}$.

Die Wachstumsstärke $\lambda_{\mathfrak{r}}$ ist natürlich nicht negativ. Es gilt der

Satz 4 [34]). a) *Jede nicht-mittelbare Randstelle — insbesondere also jede unmittelbare Randstelle — einer zerfällbaren Fläche $W \in \mathfrak{R}$ hat eine Wachstumsstärke $\lambda_{\mathfrak{r}} \geqq 1$.*

b) *Jeder logarithmische Windungspunkt auf einer Fläche $W \in \mathfrak{R}$ hat die Wachstumsstärke Eins.*

c) *Auf (zerfällbaren oder unzerfällbaren) Flächen $W \in \mathfrak{R}$ gibt es mittelbare, auf unzerfällbaren Flächen $W \in \mathfrak{R}$ gibt es unmittelbare Randstellen der Wachstumsstärke Null.*

Beweis. a) Zu einer nicht-mittelbaren Randstelle einer zerfällbaren Fläche $W \in \mathfrak{R}$, die sich aus den benachbarten Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_k$ der Relativstärken $p_1, \ldots, p_k$ $(k \geqq 1)$ zusammensetzt, gehört wenigstens ein logarithmisches Elementargebiet im Streckenkomplex, also eine Relativ-Randstelle der Relativstärke ∞. Weil für die Verschmelzungsstärke $p_{\varkappa,\varkappa+1}$ des Sinusendes, das die Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\varkappa, \mathfrak{r}_{\varkappa-1}$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k-1)$ verschmilzt, die Beziehung $p_{\varkappa,\varkappa+1} \leqq \operatorname{Min}(p_\varkappa, p_{\varkappa+1})$ gilt, folgt aus (45), (45′) die Ungleichung

$$\lambda_{\mathfrak{r}} \geqq \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{|p_\varkappa - p_{\varkappa+1}|}{\pi^2 + p_\varkappa p_{\varkappa+1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{p_1}{\pi} + \operatorname{arc\,tg} \frac{p_k}{\pi} \right\}.$$

Weil wenigstens ein $p_\varkappa = \infty$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ ist, folgt die Behauptung.

b) Ein logarithmischer Windungspunkt besteht aus *einer* unmittelbaren Relativ-Randstelle, es ist $k = 1$ und $p_1 = \infty$; (45), (45′) geben wieder die Behauptung.

c) Eine mittelbare Randstelle, die aus einer einzigen Relativ-Randstelle der Relativstärke Null besteht, hat mit $k = 1$, $p_1 = 0$ nach (45), (45′) die Wachstums-

[34]) Ein Ergebnis MACLANES [11] über eine ähnliche Flächenklasse drückt sich in unserer Terminologie folgendermaßen aus: Für die Wachstumsstärke $\lambda_{\mathfrak{r}}$ einer mittelbaren Randstelle $\mathfrak{r}$ über der Koordinate ∞, die durch Konvergenz der Koordinaten a_n der algebraischen Windungspunkte in einem einfachen Sinusende entsteht, gilt $0 \leqq \lambda_{\mathfrak{r}} \leqq 1$; $\lambda_{\mathfrak{r}} = 1$ kann höchstens dann eintreten, wenn $\lim \frac{\log |a_n|}{n} = \infty$ ist. Die Formeln (45), (45′) ergeben in diesem Fall

$$\lambda_{\mathfrak{r}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{\pi},$$ wenn p $(0 \leqq p \leqq \infty)$ die Konvergenzstärke des Sinusendes ist,

stärke Null, ebenso eine unmittelbare Randstelle auf einer unzerfällbaren Fläche für $k=1$, $p_1=p_{11}=\infty$, nach (45), (45″).

Für eine Fläche $W\in\mathfrak{R}$ erhält man sofort: entweder es ist $\lim\sum\lambda_\mu(\varrho)=0$, oder es gibt zwei positive Konstanten c_1, c_2, so daß $c_1\cdot\varrho<r(\varrho)<c_2\cdot\varrho+O(1)$. Mit (46) folgt aus Satz 2 [wenn $\lim\sum\lambda_\mu(\varrho)>0$] oder aus Satz 3 [wenn $\lim\sum\lambda_\mu(\varrho)=0$] also sofort

Satz 5. *Erzeugt $w(z)$ eine* Riemannsche *Fläche $W\in\mathfrak{R}$, die k unterschiedene Randstelle $\mathfrak{r}^{(\varkappa)}$ der Wachstumsstärken $\lambda_{\mathfrak{r}^{(\varkappa)}}$ ($\varkappa=1,2,\ldots,k$) trägt, so wächst $w(z)$ von der Ordnung $\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_{\mathfrak{r}^{(\varkappa)}}$, und zwar vom Mitteltypus dieser Ordnung, wenn $\sum_{\varkappa=1}^{k}\lambda_{\mathfrak{r}^{(\varkappa)}}>0$ ist. $\lambda_{\mathfrak{r}^{(\varkappa)}}$ bestimmt sich nach* (45), (45′), (45″) *aus dem Aufbau der Randstelle $\mathfrak{r}^{(\varkappa)}$.*

Korollar. *Zerfällbare* Riemannsche *Flächen $W\in\mathfrak{R}$ mit wenigstens einer nicht-mittelbaren Randstelle werden erst von Funktionen $w(z)$ einer Wachstumsordnung $s\geqq\frac{1}{2}$ erzeugt.*

Das Korollar folgt sofort mit Satz 4a).

Satz 5 enthält offenbar den (allgemein bestmöglichen) Randstellensatz[35]) für die Flächenklasse $\mathfrak{R}$, der ja aussagt, daß eine Funktion $w(z)$, die die punktierte Ebene auf eine zerfällbare Riemannsche Fläche mit k unterschiedenen unmittelbaren Randstellen abbildet, wenigstens vom Mitteltyp der Ordnung $k/2$ anwächst. Für $W\in\mathfrak{R}$ ist die Aussage des Satzes 5 allerdings erheblich schärfer. Man erkennt ferner, weshalb es keinen dem Randstellensatz entsprechenden schärferen allgemeinen Satz geben kann, der außer unmittelbaren Randstellen auch mittelbare zuläßt: mittelbare Randstellen liefern nämlich unter Umständen gar keinen Beitrag zur Wachstumsordnung der erzeugenden Funktion[36]).

Als Beispiel betrachten wir die Mittag-Lefflerschen E_α-Funktionen $E_\alpha(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\Gamma(1+\alpha\nu)}$ für $\alpha\geqq 2$. Die erzeugten Riemannschen Flächen[37]) haben eine einzige unmittelbare Randstelle, und zwar über ∞, die Verzweigungspunkte liegen sämtlich über der reellen Achse; der Streckenkomplex S^* wird gebildet von einem Sinusende,

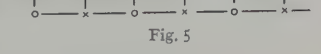

Fig. 5

das in ein logarithmisches Elementargebiet hineinragt, der Streckenkomplex hat also zwei Randgebiete: ein Sinusgebiet und ein logarithmisches Elementargebiet (Fig. 5). Für die Koordinaten a_n der algebraischen Windungspunkte

---

[35]) Siehe z. B. Ullrich [24].

[36]) Eine feinere Unterscheidung in der Definition der Konvergenzstärke und der Verschmelzungsstärke von Sinusenden verbunden mit genaueren Abschätzungen in § 6 würde auch den Einfluß von Randstellen auf den Typus einer Wachstumsordnung erkennen lassen; vgl. das Beispiel der Gammafunktion in [6].

[37]) Vgl. die Untersuchung von Fischer [3].

des Sinusendes gilt[38])

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2}{\alpha} \cdot \sin \frac{\pi}{\alpha}\, e^{\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\pi \operatorname{ctg}\frac{\pi}{\alpha}} \left(1+\varepsilon(n)\right);$$

das Sinusende hat also die Verschmelzungsstärke $\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\alpha}$. Die Fläche gehört zur Klasse $\mathfrak{R}$, sie ist unzerfällbar für $\alpha > 2$, daher ist die Wachstumsstärke λ_∞ der Randstelle über ∞ nach (45), (45″) gegeben durch $2 \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi(p_1 - p_{11})}{\pi^2 + p_1 p_{11}}$. Mit $p_1 = \infty$, $p_{11} = \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\alpha}$ erhält man

$$\lambda_\infty = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\infty}{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha}. \tag{47}$$

Für $\alpha = 2$ wird die unmittelbare Randstelle zum logarithmischen Windungspunkt und die Fläche wird demgemäß zerfällbar [es ist $E_2(z) = \cos h\, \sqrt{z}$], also ist nach Satz 4b) $\lambda_\infty = 1$; es gilt also (47) auch für $\alpha = 2$. Nach Satz 5 folgt das bekannte Ergebnis: die Wachstumsordnung von $E_\alpha(z)$ [für $\alpha \geqq 2$] ist α^{-1}.

§ 8. Defekt der Randstellensorten

Der Defekt $\delta(a)$ eines Wertes a bestimmt sich für die Funktionen $w(z)$, die Flächen $W \in \mathfrak{R}$ erzeugen, aus den Anzahlen $\nu(\varrho, a)$ und $\nu(\varrho)$ nach Satz 2 [Teil b) insbesondere], *wenn die Wachstumsordnung von* $w(z)$ *positiv* ist[39]); denn wie sich gleich ergeben wird, ist für große ϱ entweder $c_a \cdot \varrho = \mathsf{N}(\varrho, a) + O(\varrho^{1-\alpha})$ mit $c_a > 0$ — dann sind die ersten der Gln. (36), (36′) erfüllt — oder es ist $\nu(\varrho, a) = o(\varrho)$; dann ermöglicht die Formel (38) eine exakte Aussage: es ist nämlich jedenfalls $c \cdot \varrho < \mathsf{N}(\varrho) + O(1)$ mit positivem c. Es sei also $W \in \mathfrak{R}$.

Wir bestimmen zunächst den von einer Ebene E_{μ_τ} herrührenden Beitrag $\nu^{(\mu_\tau)}(\varrho)$ bzw. $\nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, a)$ zu $\nu(\varrho)$ bzw. $\nu(\varrho, a)$. Es sei Q_{μ_τ} in E_{μ_τ} Bild eines Flächenstückes $f^0_{\mu_\tau}$ mit $f_{\mu_\tau} \in H$, und es seien w'_{μ_τ}, w''_{μ_τ} die Koordinaten des linken und des rechten Randgebietes der zugehörigen Knotenfolge. Ist $f_{\mu_\tau} \in H_a$, so ist

$$\text{(48a)} \quad \begin{cases} \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho) = \dfrac{\varrho}{2\pi} + O(1), \quad \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, a) = \dfrac{\varrho}{2\pi} + O(1) \quad \text{für} \quad a \neq w'_{\mu_\tau}, w''_{\mu_\tau}; \\ \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, w'_{\mu_\tau}) = \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, w''_{\mu_\tau}) = 0. \end{cases}$$

Es sei $f_{\mu_\tau} \in \dot{H}_b$, und das Sinusgebiet liege im linken Teil von f_{μ_τ}. Dann ist

$$\text{(48b)} \quad \begin{cases} \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho) = \dfrac{\varrho}{2\pi} \cdot \sin \pi\, \lambda_{\mu_\tau}(\varrho) + O(1) & \text{für} \quad \lambda_{\mu_\tau}(\varrho) \leqq \dfrac{1}{2}, \\ \quad = \dfrac{\varrho}{2\pi} + O(1) & \text{für} \quad \lambda_{\mu_\tau}(\varrho) \geqq \dfrac{1}{2}; \\ \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, a) = \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho) + O(1) & \text{für} \quad a \neq w'_{\mu_\tau}, w''_{\mu_\tau}, \\ \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, w'_{\mu_\tau}) = \dfrac{\varrho}{2\pi} \cdot \sin \pi\, \lambda_{\mu_\tau}(\varrho) + O(1), & \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, w''_{\mu_\tau}) = 0. \end{cases}$$

[38]) FISCHER [3], Teil II, Formel (33).

[39]) Auch im Fall $\lim \sum \lambda_\mu(\varrho) = 0$ würden sich bei genauerem Abschätzen in § 6 Ergebnisse erzielen lassen; z. B. würde man zeigen können, daß es Funktionen der Ordnung Null gibt, für die endlich aber beliebig viele Stellen positiven Defekt (der Summe 2) haben.

Ganz analoge Formeln erhält man, wenn das Sinusgebiet im rechten Teil von f_{μ_τ} liegt: es ist dann $\lambda_{\mu_\tau}(\varrho)$ durch $1 - \lambda_{\mu_\tau}(\varrho)$ zu ersetzen und w'_{μ_τ} mit w''_{μ_τ} zu vertauschen. Ist jedoch $f_{\mu_\tau} \equiv H_\tau$, so verbinden wir aufeinanderfolgende Grätenendpunkte durch ein Geradenstück. Die Gleichung des gewonnenen Streckenzuges sei in Polarkoordinaten

$$\varphi_{\mu_\tau} = \pi\,\lambda^{(r)}_{\mu_\tau}(\varrho) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{\mu_\tau} = \pi\,\lambda^{(l)}_{\mu_\tau}(\varrho) \quad [\lambda^{(r)}_{\mu_\tau}(\varrho) < \lambda^{(l)}_{\mu_\tau}(\varrho)]$$

für die Grätenendpunkte auf dem rechten bzw. dem linken Rand von Q_{μ_τ}. Es ist dann

$$\text{(48c)}\quad \begin{cases} \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho) = \dfrac{\varrho}{2\pi} + O(1), \quad \text{wenn} \quad \lambda^{(r)}_{\mu_\tau}(\varrho) \leq \dfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lambda^{(l)}_{\mu_\tau}(\varrho) \geq \dfrac{1}{2} \\ \qquad = \dfrac{\varrho}{2\pi}\,\mathrm{Max}\left\{\sin\pi\,\lambda^{(r)}_{\mu_\tau}(\varrho),\ \sin\pi\,\lambda^{(l)}_{\mu_\tau}(\varrho)\right\} + O(1) \quad \text{sonst}; \\ \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, a) = \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho) + O(1) \quad \text{für} \quad a \neq w'_{\mu_\tau}, w''_{\mu_\tau}, \\ \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, w'_{\mu_\tau}) = \dfrac{\varrho}{2\pi}\sin\pi\,\lambda^{(l)}_{\mu_\tau}(\varrho) + O(1), \\ \nu^{(\mu_\tau)}(\varrho, w''_{\mu_\tau}) = \dfrac{\varrho}{2\pi}\sin\pi\,\lambda^{(r)}_{\mu_\tau}(\varrho) + O(1). \end{cases}$$

Wir spalten die Untersuchung wieder auf in den Fall der zerfällbaren und den der unzerfällbaren Flächen. Bei den letzteren kann als einziger Wert die Randstellenkoordinate defekt sein, denn die Anzahlfunktion $\nu(\varrho, a)$ unterscheidet sich für alle anderen Werte von a nur um $O(1)$ von $\nu(\varrho)$, wie man mit Hilfe von (42), (42'), (43'), (48b), (48c) erschließt[40]). Wir wollen, wie eingangs erwähnt, annehmen, es sei $\lim \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho) = \Lambda > 0$, d.i.: die Wachstumsordnung der erzeugenden Funktion sei positiv.

Sei $W \in \mathfrak{R}$ eine unzerfällbare Fläche mit einer Randstelle r über w_0, die sich aus n mittel- und unmittelbaren Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\nu$ mit den Relativstärken p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ zusammensetzt; die benachbarten Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\nu, \mathfrak{r}_{\nu-1}$ seien verschmolzen durch ein Sinusende der Verschmelzungsstärke $p_{\nu,\nu-1}$ $(\nu \bmod n)$. Es ist $\mathrm{Min}(p_\nu, p_{\nu-1}, p_{\nu,\nu+1}) = p_{\nu,\nu+1}$. Man entnimmt aus der Definition von $\mathsf{N}(\varrho)$ den Formeln (48) nach den Definitionen der Relativstärke von Relativ-Randstellen und der Verschmelzungsstärke von Sinusenden die Beziehungen

$$\text{(49)}\qquad \mathsf{N}(\varrho) = \frac{2\varrho}{\Lambda}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p^2_{\nu,\nu+1} + \pi^2}} + O(\varrho^{1-\alpha}),$$

$$\text{(49')}\quad \begin{cases} \nu(\varrho, w_0) = \varrho \cdot \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p^2_\nu + \pi^2}} + O(\varrho^{1-\alpha}), \\ \mathsf{N}(\varrho, w_0) = \dfrac{2\varrho}{\Lambda} \cdot \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p^2_\nu + \pi^2}} + O(\varrho^{1-\alpha}) \end{cases}$$

[40]) Vgl. Fußnote 32.

[wegen $\lim \sum \lambda_\mu(\varrho) = \Lambda > 0$ ist $\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1} \neq \infty$ für wenigstens einen Wert ν]. Der Defekt $\delta(w_0)$ der Stelle w_0 ist, nach (37) für $\sum \mathfrak{p}_\nu^{-1} > 0$, nach (38) für $\sum \mathfrak{p}_\nu^{-1} = 0$, also gegeben durch

$$\delta(w_0) = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} - \sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{p}_\nu^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}}}. \tag{49''}$$

Für eine unmittelbare Relativ-Randstelle $\mathfrak{r}_\nu$ gilt $\mathfrak{p}_\nu = \infty$, für eine mittelbare gilt ($\nu \bmod n$)

$$\mathfrak{p}_\nu \geq \operatorname{Max}(\mathfrak{p}_{\nu-1,\nu}, \mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}), \tag{50}$$

dies ist aber auch die einzige Einschränkung. Sind alle $\mathfrak{r}_\nu$ relativ unmittelbar [$\mathfrak{p}_\nu = \infty$], so ist $\delta(w_0) = 1$; dagegen kann $\delta(w_0)$ der Null beliebig nahe kommen, wenn neben einer festen Anzahl von unmittelbaren Relativ-Randstellen eine genügend große Zahl von sehr schwachen mittelbaren Relativ-Randstellen — etwa solchen, für die in (50) das Gleichheitszeichen steht — die Randstelle $\mathfrak{r}$ bildet. Offenbar kann $\delta(w_0)$ durch (mannigfache) Wahl der Stärken der Relativ-Randstellen gleich einer vorgegebenen Zahl d, $0 < d \leqq 1$, gemacht werden. Es gilt also der

Satz 6. *Zu jeder vorgegebenen Zahl d, $0 < d \leqq 1$, gibt es eine (unzerfällbare) Fläche $W \in \mathfrak{R}$, deren erzeugende Funktion $w(z)$ als einzigen defekten Wert den Wert w_0 mit dem Defekt $\delta(w_0) = d$ hat.*

Sei $W \in \mathfrak{R}$ nun zerfällbar. Es werde eine Randstelle $\mathfrak{r}$ über a gebildet durch n Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\nu$ der Stärken $\mathfrak{p}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), die verschmolzen seien durch $n-1$ Sinusenden der Verschmelzungsstärken $\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$). Mit $\mathsf{N}_\mathfrak{r}(\varrho)$ bzw. $\mathsf{N}_\mathfrak{r}(\varrho, a)$ bezeichnen wir den Beitrag zu $\mathsf{N}(\varrho)$ bzw. $\mathsf{N}(\varrho, a)$, der von denjenigen Flächenstücken $f_\mu \in H$ herrührt, die eine der Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\nu$ am Rand haben. Es ist

$$\mathsf{N}_\mathfrak{r}(\varrho) = \frac{2\varrho}{\Lambda} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} (\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} \right\} + O(\varrho^{1-\alpha}). \tag{51}$$

Formal kann man (51) mit (49) dadurch in Beziehung bringen, daß man den letzten Summanden $1/\pi$ in der Klammer auffaßt als herrührend von dem fehlenden n-ten verschmelzenden Ende, was sich auswirkt wie ein Ende der Verschmelzungsstärke Null. Weiter gilt

$$\mathsf{N}_\mathfrak{r}(\varrho, a) = \frac{2\varrho}{\Lambda} \sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{p}_\nu^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} + O(\varrho^{1-\alpha}). \tag{51'}$$

Es ist nun zu beachten, daß die einfach über alle Randstellen erstreckte Summe der $\mathsf{N}_\mathfrak{r}(\varrho)$ die zu einer Ebene E_μ gehörige Anzahlfunktion $\int \nu^{(\mu)}(\varrho)\, df(\varrho)$ doppelt enthält, wenn im zugehörigen Flächenstück $f_\mu \in H$ zwei verschiedene Randstellen von W erreichbar sind; es ist hierbei

$$\int \nu^{(\mu)}(\varrho)\, df(\varrho) = \frac{2}{\Lambda} \frac{\varrho}{2\pi} + O(\varrho^{1-\alpha}).$$

Umgekehrt sind die Sinusenden, in denen keine Konvergenz stattfindet, unberücksichtigt geblieben. Wir treffen daher folgende Verabredung: Ein Sinusgebiet, in dem die Koordinaten der Elementargebiete nicht konvergieren, sei aufgefaßt als ob es eine Randstelle bewirke, der aber keine Koordinate zugeordnet sei. Dann ist

$$\mathsf{N}(\varrho) = \sum_{\mathfrak{r}} \left(\mathsf{N}_{\mathfrak{r}}(\varrho) - \frac{2}{\Lambda} \cdot \frac{\varrho}{2\pi} \right) + O(\varrho^{1-\alpha}), \tag{52}$$

wobei die Summation unter Beachtung der Verabredung über alle Randstellen zu erstrecken ist. Ferner ist

$$\mathsf{N}(\varrho, a) = \sum_{\mathfrak{r}=a} \left(\mathsf{N}_{\mathfrak{r}}(\varrho, a) - \frac{2}{\Lambda} \frac{\varrho}{2\pi} \right) + \sum_{\mathfrak{r}\neq a} \left(\mathsf{N}_{\mathfrak{r}}(\varrho) - \frac{2}{\Lambda} \frac{\varrho}{2\pi} \right) + O(\varrho^{1-\alpha}), \tag{52'}$$

wobei die erste Summe über alle Randstellen $\mathfrak{r}$ der Koordinate $r = a$, die zweite über alle übrigen zu erstrecken ist. Denn $\sum_{r=a} \mathsf{N}_{\mathfrak{r}}(\varrho, a) + \sum_{r\neq a} \mathsf{N}_{\mathfrak{r}}(\varrho)$ zählt in allen Halbebenen, die zu *zwei* Randstellen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ gehören, von denen keine über a liegt, die a-Stellen doppelt [vgl. die Bestimmung von $\mathsf{N}(\varrho)$ oben]; daher ist in jedem Summanden der zweiten Summe die Korrektur $-\frac{2}{\Lambda}\frac{\varrho}{2\pi}$ anzubringen; in allen Halbebenen, die zu zwei Randstellen gehören, von denen eine über a liegt, zählt $\sum_{r=a} \mathsf{N}_{\mathfrak{r}}(\varrho, a)$ die richtige Anzahl, $\sum_{r\neq a} \mathsf{N}_{\mathfrak{r}}(\varrho)$ zählt hingegen bis auf $O(\varrho^{1-\alpha})$ zusätzlich $\frac{2}{\Lambda}\frac{\varrho}{2\pi}$; diesen Überschuß berücksichtigt das Korrekturglied $-\frac{2}{\Lambda}\frac{\varrho}{2\pi}$ im ersten Summanden. Rechnet man $\mathsf{N}(\varrho)$, $\mathsf{N}(\varrho, a)$ nach (51), (51'), (52), (52') aus, so erhält man ähnlich wie im Fall unzerfällbarer Flächen nach (37) bzw. (38) in Satz 2 — der anwendbar ist wegen der Annahme $\lim \sum \lambda_\mu(\varrho) = \Lambda > 0$ — den

Satz 7. *Die meromorphe Funktion $w(z)$ positiver Wachstumsordnung erzeuge eine zerfällbare* RIEMANNsche *Fläche $W \in \mathfrak{R}$ mit k verschiedenen Randstellen $\mathfrak{r}^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, wobei jedes Sinusende, in dem die Koordinaten der Windungspunkte nicht konvergieren, als gesonderte Randstelle ohne Koordinate aufgefaßt sei. Die Randstelle $\mathfrak{r}^{(\varkappa)}$ sei gebildet von $n_\varkappa$ Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\nu^{(\varkappa)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_\varkappa)$ der Relativstärken $p_{\varkappa_\nu}$, die durch $n_\varkappa - 1$ Sinusenden der Verschmelzungsstärken $p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_\varkappa - 1)$ verschmolzen sind. Bezeichnen wir die Spur von $\mathfrak{r}^{(\varkappa)}$ mit $r_\varkappa$, so ist der Defekt $\delta(a)$ der Stellensorte a gegeben durch*

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(a) &= 1 - \frac{\sum_{\varkappa}^{r_\varkappa \neq a} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa - 1} (p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi} \right\} + \sum_{\varkappa}^{r_\varkappa = a} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa} (p_{\varkappa_\nu}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi} \right\}}{\sum_{\varkappa=1}^{k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa - 1} (p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi} \right\}} \\ &= \frac{\sum_{\varkappa}^{r_\varkappa = a} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa - 1} (p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} - \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa} (p_{\varkappa_\nu}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}}{\sum_{\varkappa=1}^{k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa - 1} (p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi} \right\}} . \end{aligned} \right. \tag{53}$$

Es sei $\mathfrak{r}^{(\varkappa)}$ eine Randstelle, die gebildet wird von $n_\varkappa$ Relativ-Randstellen $\mathfrak{r}_\nu^{(\varkappa)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_\varkappa)$ der Relativstärken $p_{\varkappa_\nu}$, wobei $\mathfrak{r}_\nu^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{r}_{\nu-1}^{(\varkappa)}$ verschmolzen seien durch ein Sinusende der Verschmelzungsstärke $p_{\varkappa_{\nu,\nu-1}}$ (ν mod $n_\varkappa$) [formal werde bei zerfällbaren Flächen für $\nu = n_\varkappa$ die Größe $p_{\varkappa_{\nu,\nu-1}} = 0$ gesetzt]. Die Formeln (45) zeigen, daß $\mathfrak{r}^{(\varkappa)}$ dann und nur dann einen Beitrag zur Wachstumsordnung gibt, wenn nicht alle Differenzen $p_{\varkappa_\nu} - p_{\varkappa_{\nu,\nu-1}}$ und $p_{\varkappa_\nu} - p_{\varkappa_{\nu-1,\nu}}$ gleich Null sind; die Formeln (49″), (53) zeigen, daß dieselbe Bedingung für den Beitrag zum Defekt gilt [in den Differenzen ist beidemale formal $\infty - \infty = 0$ zu setzen], *wenn auch noch* $\sum\sum p_{\varkappa_{\nu,\nu-1}}^{-1} > 0$ ist. Berücksichtigen wir, daß die letzte Bedingung gleichbedeutend damit ist, daß die zugehörige meromorphe Funktion positive Wachstumsordnung hat, so folgt der

Satz 8. *Ist auf einer Fläche* $W \in \mathfrak{R}$ *eine Randstelle so kräftig, daß sie positive Wachstumsstärke hat, so hat die Stellensorte der Randstelle positiven Defekt. Umgekehrt: Gibt eine Randstelle einen positiven Beitrag zum Defekt ihrer Stellensorte, so ist auch ihre Wachstumsstärke positiv, wenn die Wachstumsordnung der erzeugenden meromorphen Funktion nicht überhaupt Null ist.*

Der erste Teil des Satzes zeigt, daß auch eine mittelbare Randstelle einen positiven Beitrag zum Defekt ihrer Stellensorte bewirken kann; dies ist in der Regel so, nämlich wenn die mittelbare Randstelle nicht die Wachstumsstärke Null hat[41]). Die Einschränkung im zweiten Teil des Satzes ist notwendig, denn selbstverständlich gibt es ganze Funktionen der Ordnung Null, bei denen also $\delta(\infty) = 1$ [vgl. auch Fußnote 39].

Für die Summe aller Defekte erhalten wir durch Summation über a aus (53) die Beziehung

$$\sum \delta(a) = 1 + \frac{\frac{k}{2\pi} - \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa} (p_{\varkappa_\nu}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{k}{2\pi} + \sum_{\varkappa=1}^{k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa - 1} (p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}^2 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}} . \tag{54}$$

Man sieht, die Defektsumme kann dann und nur dann gleich 2 werden, wenn in (54) in allen Summanden der Doppelsumme sowohl alle $p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}$ wie alle $p_{\varkappa_\nu}$ unendlich sind. [Dann ist übrigens auch jeder Defekt eine rationale Zahl.] Der Grund liegt darin, daß ein von unendlich verschiedenes $p_{\varkappa_{\nu,\nu+1}}$ oder $p_{\varkappa_\nu}$ in den zugehörigen Ebenen E_μ Grätenendpunkte in solcher asymptotischer Anzahl mit sich bringt, daß die von den zugehörigen algebraischen Windungspunkten herrührende gesamte algebraische Verzweigtheit[42]) positiv ausfällt.

Es gelingt nun, Funktionen zu konstruieren, die an k vorgegebenen Stellen $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ der reellen Achse den vorgegebenen Defekt $\delta(a_\varkappa) = d_\varkappa$ besitzen, wenn die Bedingungen $d_\varkappa < 1$, $\sum_{\varkappa=1}^{k} d_\varkappa < 2$ erfüllt sind. Zur Konstruktion — ich will nicht auf Einzelheiten eingehen, ebensowenig darauf, daß die Realität der $a_\varkappa$ natürlich unwesentlich ist — wählen wir zunächst positive Zahlen

[41]) Vgl. Fußnote 5.

[42]) Dies ist der Gesamtindex Φ in ULLRICH [21].

$p_{\iota_\nu,\nu+1}$[43]) ($\nu=1, 2, \ldots, n_\iota-1$), so daß die aus diesen Zahlen [vgl. (53)] bestimmten Größen $d'_\varkappa$, $d''_\varkappa$ mit

$$d'_\varkappa=\frac{\sum\limits_{\substack{\iota\\ r_\iota=a_\varkappa}}\frac{1}{\pi}}{\sum\limits_{\iota=1}^{i}\left\{\sum\limits_{\nu=1}^{n_\iota-1}(p^2_{\iota_\nu,\nu+1}+\pi^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\pi}\right\}},\qquad d''_\varkappa=\frac{\sum\limits_{\substack{\iota\\ r_\iota=a_\varkappa}}\left\{\frac{1}{\pi}+\sum\limits_{\nu=1}^{n_\iota-1}(p^2_{\iota_\nu,\nu+1}+\pi^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}}{\sum\limits_{\iota=1}^{i}\left\{\sum\limits_{\iota=1}^{n_\iota-1}(p^2_{\iota_\nu,\nu+1}+\pi^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\pi}\right\}}$$

die Beziehungen $d'_\varkappa<d_\varkappa<d''_\varkappa$, $\sum\limits_{\varkappa=1}^{k}d''_\varkappa<2$ erfüllen; eine solche Wahl ist offenbar möglich. Jetzt können dazu noch Zahlen p_{ι_ν} ($\nu=1, 2, \ldots, n_\iota$) so bestimmt werden[43]), daß gilt

$$\frac{\sum\limits_{\substack{\iota\\ r_\iota=a_\varkappa}}\left\{\sum\limits_{\nu=1}^{n_\iota-1}(p^2_{\iota_\nu,\nu+1}+\pi^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\pi}-\sum\limits_{\nu=1}^{n_\iota}(p^2_{\iota_\nu}+\pi^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}}{\sum\limits_{\varkappa=1}^{k}\left\{\sum\limits_{\nu=1}^{n_\iota-1}(p^2_{\iota_\nu,\nu+1}+\pi^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\pi}\right\}}=d_\varkappa.$$

Die Funktion, die die Fläche mit den Randstellen $\mathfrak{r}_\iota$ über der Koordinate r_ι der zugehörigen Relativstärken p_{ι_ν} und Verschmelzungsstärken $p_{\iota_\nu,\nu+1}$ erzeugt, löst dann die Aufgabe. Es gilt also der

Satz 9. *Es sei eine Defektverteilung $\delta(a_\varkappa)=d_\varkappa$ ($\varkappa=1, 2, \ldots, k$) vorgegeben mit $0<d_\varkappa<1$, $\sum\limits_{\varkappa=1}^{k}d_\varkappa<2$ und $a_\varkappa$ reell. Es gibt dann eine (eine Fläche $W\in\mathfrak{R}$ erzeugende) meromorphe Funktion $w(z)$, die die vorgegebene Defektverteilung besitzt.*

Die Ordnung einer Funktion $w(z)$, die eine Fläche $W\in\mathfrak{R}$ erzeugt, kann nicht unmittelbar aus der Defektverteilung gewonnen werden; denn in die Ordnung von $w(z)$ gehen die Summe von Arcustangenten gewisser Ausdrücke ein, die aus den Relativstärken und Verschmelzungsstärken gebildet sind, während die Defekte algebraisch von den Relativ- und den Verschmelzungsstärken abhängen; und es ist nicht möglich, aus der Größe dieser direkt auf die Größe jener, d.i. auf die Ordnung, zu schließen. Dennoch besteht natürlich ein gewisser Zusammenhang. Über bekannte Aussagen hinausgehend vermutete Teichmüller [*20*], daß für jede meromorphe eine zerfällbare Fläche erzeugende Funktion $w(z)$ mit den Defekten $\delta(a_\varkappa)=d_\varkappa$ ($\varkappa=1, 2, \ldots, k$) die Relation

$$s\geq\frac{1}{\pi}\sum_{\varkappa=1}^{k}\arccos(1-d_\varkappa)$$

gelte, wo s die (obere) Ordnung von $w(z)$ ist. Als „Testobjekt" für diese Vermutung würden sich die Flächen $W\in\mathfrak{R}$ etwa eignen.

---

[43]) $p_{\iota_\nu,\nu+1}$, p_{ι_ν} gehöre zur Randstelle $\mathfrak{r}^{(\iota)}$ ($\iota=1, 2, \ldots, i$) des Spurpunktes r_ι. Die Randstellen werden in geeigneter Weise in die Stellensorten $a_\varkappa$ gelegt.

§ 9. Die Abschätzungsmethode von Ahlfors

Ist die Fläche W zu unregelmäßig gebaut, als daß (16) durch (16′) fortgesetzt werden könnte, so greifen wir, um ein Ergebnis zu erzielen, zurück auf ein Verfahren, das sich auf Überlegungen gründet, die zuerst von AHLFORS [1] angestellt wurden. Die Resultate, die wir auf diesem Wege erhalten, sind im allgemeinen ungenauer, jedoch erlaubt die AHLFORSsche Methode, den Satz 3 zu beweisen und so die Lücke zu schließen, die Satz 2 für Funktionen der Ordnung Null offen ließ. Wir übernehmen die Bezeichnungen der vorangehenden Paragraphen.

Erzeuge also die meromorphe Funktion $w(z)$ die Fläche $W \in \mathfrak{W}$ als Bild der endlichen z-Ebene, $B_{\varrho,z}$ sei in der z-Ebene das Urbild der geschlossenen Kurve $B_{\varrho,w}$ auf W, und es sei ϱ hinreichend groß. Wir bilden die längs der positiv reellen Achse aufgeschnittene z-Ebene ab durch $v = \log z$ auf den Streifen $0 \leq \Im(v) \leq 2\pi$. Weiter setzen wir

$$\omega(\varrho) = \log \frac{u_2(\varrho)}{u_1(\varrho)}.$$

Die v-Bildkurve $B_{\varrho,v}$ von $B_{\varrho,z}$ hat eine Länge, die sicher nicht kleiner ist als die Diagonale des Rechtecks mit den Seiten $\omega(\varrho)$ und 2π:

$$\sqrt{4\pi^2 + \omega^2(\varrho)} \leq \sum_{\mu=1}^{m} \int_{B_\varrho^\mu} \left| \frac{dv}{d\zeta_\mu} \right| |d\zeta_\mu|,$$

wobei m wieder die Gesamtzahl der bei der Zerschneidung von W ausfallenden Flächenstücke $f_\mu \in G \cup H$ ist. Nach der SCHWARZschen Ungleichung folgt

$$(55) \quad 4\pi^2 + \omega^2(\varrho) \leq \left(\sum_{\mu=1}^{m} \int_{B_\varrho^\mu} D_\mu(\zeta_\mu) |d\zeta_\mu| \right) \left(\sum_{\mu=1}^{m} \int_{B_\varrho^\mu} \left| \frac{dv}{d\zeta_\mu} \right|^2 \cdot \frac{1}{D_\mu(\zeta_\mu)} \cdot |d\zeta_\mu| \right),$$

wo $D_\mu(\zeta_\mu)$ der Dilatationsquotient der quasikonformen Abbildung $q_\mu(\zeta_\mu)$ ist. Nun ist

$$\int_{B^\mu} D_\mu |d\zeta_\mu| = \pi \lambda_\mu(\varrho) \cdot \varrho + \pi \varkappa_\mu(\varrho) \quad \text{mit nicht-negativem } \varkappa_\mu(\varrho) = O(1)$$

sobald ϱ genügend groß; wir erhalten somit nach Division mit dem ersten Faktor der rechten Seite in (55) die Beziehung

$$\frac{4\pi^2 + \omega^2(\varrho)}{\pi \sum_{\mu=1}^{m} (\varrho \cdot \lambda_\mu(\varrho) + \varkappa_\mu(\varrho))} \leq \sum_{\mu=1}^{m} \int_{B_\varrho^\mu} \left| \frac{dv}{d\zeta_\mu} \right|^2 \cdot \frac{1}{D_\mu(\zeta_\mu)} |d\zeta_\mu|.$$

Diese Ungleichung integrieren wir nach ϱ zwischen den Grenzen ϱ', ϱ'' $(\varrho' < \varrho'')$ und beachten, daß die rechte Seite dann höchstens gleich dem Inhalt der von $B_{\varrho,v}$ überstrichenen Fläche ist, der nicht größer ist als $2\pi(\log u_2(\varrho'') - \log u_1(\varrho'))$:

$$\int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{4\pi^2 + \omega^2}{\pi \sum \varrho \cdot \lambda_\mu + \varkappa_\mu} d\varrho \leq 2\pi \log \frac{u_2(\varrho'')}{u_1(\varrho')}.$$

Eine Umformung, die die $\omega(\varrho)$ enthaltenden Glieder auf eine Seite bringt, ergibt

$$\int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)} d\varrho - \log \frac{u_1(\varrho'')}{u_1(\varrho')} \leqq \omega(\varrho'') - \frac{1}{2\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\omega^2}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)} d\varrho.$$

Wir definieren eine Menge P in folgender Weise. Es sei

$$\varrho \in \mathsf{P}, \text{ wenn } \omega(\varrho) - \frac{1}{2\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho} \frac{\omega^2}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)} d\varrho > 1 \text{ und } \varrho \geqq \varrho'.$$

Setzen wir

$$\alpha(\varrho) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\varrho'}^{\varrho} \frac{\omega^2}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)} d\varrho,$$

so ist für $\varrho \in \mathsf{P}$

$$\frac{d\alpha}{d\varrho} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\omega^2}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)} \geqq \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{(1+\alpha)^2}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)}.$$

Weil $\alpha(\varrho)$ eine monotone Funktion ist, ergibt die Integration über die Menge P die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathsf{P}} \frac{d\varrho}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)} \leqq \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(1+\alpha)^2} < \infty.$$

Das Maß von P gemessen in der Metrik

$$df(\varrho) = \frac{d\varrho}{\varrho \cdot \sum_{\mu=1}^{m}\left(\lambda_\mu(\varrho) + \frac{\varkappa_\mu(\varrho)}{\varrho}\right)} \tag{56}$$

ist daher endlich. Weil $\sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)$ beschränkt (und positiv) ist, gibt es also beliebig große Werte von ϱ'', für die die Ungleichung

$$\int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\varrho \cdot \sum\left(\lambda_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{\varrho}\right)} d\varrho - \log \frac{u_1(\varrho'')}{u_1(\varrho')} \leqq 1 \tag{57}$$

besteht. [$u_1(\varrho)$ ist daher nicht beschränkt, nach der Definition von $u_1(\varrho)$ folgt wieder Satz 1.] Die mit (57) gleichbedeutende Formel

$$u_1(\varrho) \geqq C\, e^{f(\varrho)} \text{ mit } C > 0, \quad f(\varrho) = \int_{\varrho'}^{\varrho} df(\varrho) = \int_{\varrho'}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho \cdot \sum_{\mu=1}^{m}\left(\lambda_\mu(\varrho) + \frac{\varkappa_\mu(\varrho)}{\varrho}\right)} \tag{57'}$$

gilt bis auf eine Menge P von endlichem $f(\varrho)$-Maß. Aus Stetigkeitsgründen ist P eine Summe von offenen Intervallen.

Mit $v(\varrho) = O(\varrho)$ folgt aus (57′) zunächst

$$1 \geqq \overline{\lim} \frac{\log v(\varrho + 0)}{\log \varrho} \geqq \mathrm{LIM} \frac{\log v(\varrho + 0)}{\log u_1(\varrho)} \cdot \frac{f(\varrho)}{\log \varrho};$$

das Zeichen LIM besage dabei: Limesbildung unter Weglassung der Ausnahmemenge P. Wir brauchen aber bei der Limesbildung die Ausnahmemenge P nicht auszuschließen, wir können das Zeichen LIM durch das Zeichen lim ersetzen: für $\varrho \in \mathsf{P}$ bezeichne δ_ϱ den Abstand des Punktes ϱ vom linken Endpunkt des Ausnahmeintervalles, in dem ϱ liegt; für $\varrho \notin \mathsf{P}$ sei $\delta_\varrho = 0$. Es ist dann stets

$$\frac{\log \varrho + O(1)}{f(\varrho - \delta_\varrho) + O(1)} \geqq \frac{\log v(\varrho + 0)}{\log u_1(\varrho)}.$$

Es ist aber $f(\varrho) - f(\varrho - \delta_\varrho)$ beschränkt, also gilt auch

$$\overline{\lim} \frac{\log v(\varrho + 0)}{\log u_1(\varrho)} \leqq \overline{\lim} \frac{\log \varrho}{f(\varrho)}. \tag{58}$$

Mit der Umkehrfunktion $\varrho_1(r)$ von $u_1(\varrho)$ ist nach (24), (30)

$$\frac{\log n(r)}{\log r} \leqq \frac{\log v(\varrho_1(r) + 0)}{\log u_1(\varrho_1(r) - 0)},$$

also wegen der Stetigkeit von $\varrho_1(r)$ nach (58)

$$\overline{\lim} \frac{\log n(r)}{\log r} \leqq \overline{\lim} \frac{\log \varrho}{f(\varrho)}.$$

Auf ähnliche Weise folgt mit positivem s

$$\overline{\lim} \frac{n(r)}{r^s} \leqq C_0 \cdot \overline{\lim} \frac{\varrho}{e^{s f(\varrho)}}, \quad \text{wo} \quad C_0 > 0.$$

Nach den bekannten Ungleichungen

$$\overline{\lim} \frac{\log n(r)}{\log r} \geqq \overline{\lim} \frac{\log N(r)}{\log r}; \qquad \overline{\lim} \frac{n(r)}{r^s} \geqq \overline{\lim} \frac{N(r)}{r^s}$$

folgt schließlich der

Satz 10. *$w(z)$ erzeuge eine* RIEMANNsche *Fläche $W \in \mathfrak{W}$. Es sei $f(\varrho) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} df(\varrho)$, wo $df(\varrho)$ durch (56) bestimmt sei und ϱ_0 $(< \varrho)$ eine hinreichend große feste Zahl sei. Dann gilt für die (obere) Wachstumsordnung s der Funktion $w(z)$ die Ungleichung*

$$s \leqq \overline{\lim} \frac{\log \varrho}{f(\varrho)}.$$

Der Wachstumstypus der Ordnung s ist höchstens maximal, mittel oder minimal, je nachdem

$$\overline{\lim} \frac{\varrho}{e^{s f(\varrho)}}$$

unendlich, positiv endlich oder Null ist.

Als Corollar folgt Satz 3, denn aus $\lim \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(\varrho) = 0$ folgt $s \leqq 0$, also $s = 0$.

Schlußbemerkung. Welche Ergebnisse wird man erwarten können, wenn man, an Stelle endlich vieler, unendlich viele Enden zuläßt? Hier müßten wohl gewisse Symmetriebedingungen erfüllt sein, die die Schwierigkeit unendlich vieler Enden mindern. Man könnte etwa von der $\wp$-Funktion ausgehen und durch Verschiebung der zweiblättrigen Windungspunkte unendlich viele mittelbare Randstellen der Konvergenzstärke p_ν hervorrufen. Als Anhaltspunkt für die Wachstumsordnung wird die Größe $2 + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{p_\nu}{\pi}$ dienen können. Liegen die mittelbaren Randstellen so, daß ihre „Defekte" nicht vom starken Wachstum der Funktion aufgesogen werden[44]), so haben die Randstellenkoordinaten Defekte; man wird annehmen, daß man auf diese Weise auch für unendlich viele verschiedene Stellen positive Defekte erzwingen kann; und es wäre denkbar, daß die Wachstumsordnung einer Funktion mit unendlich vielen Sorten positiven Defekts sich gar nicht von 2 allzusehr zu unterscheiden braucht, wenn die Defektsumme auch klein ist.

Literatur

[*1*] Ahlfors, L.: Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen. Acta Math. **58**, 375—406 (1932). — [*2*] Elfving, G.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. Fenn., Nova Ser. **2**, Nr. 3, 1—60 (1934). — [*3*] Fischer, W.: Über die Riemannschen Flächen der Gaussschen Ψ-Funktion und der Mittag-Lefflerschen E_α-Funktionen. Mitt. Math. Sem. Gießen, H. **37**, 1—33 (1949). — [*4*] Hällström, G. af: Eine quasikonforme Abbildung mit Anwendung auf die Wertverteilungslehre. Acta Acad. Aboensis **18**, 8, 1—16 (1952). — [*5*] Huckemann, F.: Verschmelzung von Randstellen Riemannscher Flächen. Mitt. Math. Sem. Gießen H. **41**, 1—36 (1952). — [*6*] Huckemann, F.: Bestimmung der Wertverteilung der Gammafunktion aus ihrer Riemannschen Fläche. Math. Z. **59**, 375—382 (1954). — [*7*] Huckemann, F.: Zur Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckenkomplexe. Math. Z. **64**, 215—239 (1956). — [*8*] Kneser, H., u. E. Ullrich: Funktionentheorie. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946. Fiat Review, Bd. I (Reine Math.), Teil I, Kap. XII. — [*9*] Iversen, F.: Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Thèse. Helsingfors **1914**. — [*10*] Le-Van, Th.: Über das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Comment. Math. Helv. **23**, 26—49 (1949). — [*11*] MacLane, G. R.: Concerning the uniformization of certain Riemann Surfaces allied to the inverse-cosine and inverse-gamma surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **62**, 99—113 (1947). — [*12*] Nevanlinna, R.: Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen. Acta Math. **55**, 259—276 (1930). — [*13*] Nevanlinna, R.: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta Math. **58**, 295—373 (1932). — [*14*] Nevanlinna, R.: Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion. Verh. Internat. Math. Kongr. Zürich 1932, **1**, S. 221—239. — [*15*] Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. — [*16*] Pöschl, K.: Über die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen Riemannscher Flächen mit endlich vielen periodischen Enden. Math. Ann. **123**, 79—95 (1951). — [*17*] Pratje, I.: Iteration der Joukowski-Abbildung

[44]) Man wird die Randstellen nur über „wenige" Koordinaten legen, entsprechend dem Verfahren, mit dem man unendlich viele positive Verzweigungsindizes erhalten kann. Vgl. af Hällström [*4*], Huckemann [*5*].

und ihre Streckenkomplexe. Mitt. Math. Sem. Gießen, H. **48**, 1—53 (1954). — [*18*] TEICHMÜLLER, O.: Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre. Dtsch. Math. **2**, 96—107 (1937). — [*19*] TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Dtsch. Math. **3**, 621—678 (1938). — [*20*] TEICHMÜLLER, O.: Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung. Dtsch. Math. **4**, 163—190 (1939). — [*21*] ULLRICH, E.: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. **1929**. — [*22*] ULLRICH, E.: Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen. J. reine angew. Math. **166**, 220—234 (1932). — [*23*] ULLRICH, E.: Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. I, N. F. **1**, Nr. 9, 135—150 (1936). — [*24*] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jber. dtsch. Math.-Verein. **46**, 232—274 (1936). — [*25*] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wertverteilung. 9. Congr. Math. scand. Helsingfors, S. 179 bis 200, 1938. — [*26*] ULRICH, F. E.: The problem of type for a certain class of RIEMANN Surfaces. Duke Math. J. **5**, 567—589 (1939). — [*27*] WAGNER, H.: Über eine Klasse RIEMANNscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten. J. reine angew. Math. **175**, 6—49 (1936). — [*28*] WITTICH, H.: Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion. Math. Z. **51**, 1—16 (1949).

Gießen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. September 1955)

Vogel, W.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 283—308 (1956)

Die Annäherung guter Strategien bei einer gewissen Klasse von Spielen

Von
Walter Vogel

§ 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einer naheliegenden und mancher Anwendungen fähigen Klasse von Zwei-Personen-Nullsummen-Spielen auf dem Einheitsquadrat. Ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel auf dem Einheitsquadrat (s. z.B. McKinsey [9]) kann folgendermaßen erklärt werden: Gegeben ist eine Funktion $K(x; y)$, der Kern des Spieles, wobei $0 \leq x; y \leq 1$. Jeder der beiden Spieler wählt eine Verteilungsfunktion über der abgeschlossenen Strecke $[0; 1]$; diese Verteilungsfunktionen, sie sollen F und G heißen, werden Strategien genannt. Eine Strategie ist also eine Verteilungsfunktion, welche nur das Intervall $[0; 1]$ mit Gewicht belegt, d.h. eine Funktion F mit folgenden Eigenschaften: F sei von rechts stetig und monoton steigend, ferner gelte $F(x) = 0$ für $x < 0$ und $F(x) = 1$ für $x \geq 1$. Der Ausdruck $M(F; G) = \iint K(x; y)\, dF(x)\, dG(y)$ gibt dann die Zahlung an, welche der zweite Spieler an den ersten zu leisten hat. Die Aufgabe des ersten Spielers besteht darin, eine Strategie F zu wählen, welche ihm ein möglichst günstiges Ergebnis verspricht. Dabei wird vorausgesetzt, daß er nicht weiß, welche Strategie sein Gegenspieler wählt.

Machen wir keine weiteren Voraussetzungen über $K(x; y)$, so gilt

$$\sup_F \inf_G M(F; G) \leq \inf_G \sup_F M(F; G). \tag{1}$$

Wir wollen annehmen, $K(x; y)$ sei so beschaffen, daß in (1) das Gleichheitszeichen steht:

$$\sup_F \inf_G M(F; G) = \inf_G \sup_F M(F; G) = v. \tag{2}$$

v heißt der Wert des Spieles. Offenbar gibt es dann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ stets Strategien F_ε und G_ε derart, daß

$$\int K(x; y)\, dF_\varepsilon(x) \geq v - \varepsilon \quad \text{und} \quad \int K(x; y)\, dG_\varepsilon(y) \leq v + \varepsilon$$

gilt. Solche Strategien heißen ε-gute Strategien. Benutzt der erste Spieler eine ε-gute Strategie F_ε, so gilt für beliebiges G die Ungleichung $M(F_\varepsilon; G) \geq v - \varepsilon$. Er kann sich also durch Wahl von F_ε die Auszahlung $v - \varepsilon$ sichern, unabhängig davon, welche Strategie der zweite Spieler wählt.

Es kann nun sein, daß in dem Ausdruck (2) das Supremum und das Infimum angenommen werden, also $\max_F \min_G M(F; G) = \min_G \max_F M(F; G) = v$.

In diesem Falle gibt es Strategien F und G derart, daß

$$\int K(x;y)\,dF(x) \geqq v \quad \text{und} \quad \int K(x;y)\,dG(y) \leqq v$$

gilt. Solche Strategien heißen gute Strategien.

In § 2 geben wir ein Kriterium dafür an, daß eine Folge ε-guter Strategien gegen eine gute Strategie konvergiert. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Kern des Spieles von beschränkter Schwankung sei.

Die folgenden Paragraphen dienen dazu, dieses Kriterium auf Spiele anzuwenden, deren Kern die Form

$$(3) \qquad K(x;y) = f(x) - p\,g(y) \begin{cases} +p\,f(x)\,g(y) & \text{für } x < y \\ +0 & \text{für } x = y \\ -f(x)\,g(y) & \text{für } x > y \end{cases}$$

hat. Dabei seien f und g halbstetig nach oben, $0 \leqq f; g \leqq 1$ und $p \geqq 0$.

Wir werden in § 6 zeigen, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit f und g monoton wachsend annehmen können. Dann sind f und g von rechts stetig und der Kern ist von beschränkter Schwankung.

Der Spieltyp mit monotonem f und g gehört in die Klasse der Zeitspiele, welche folgende Deutung zulassen: x bzw. y sind die Zeitpunkte, in welchen der erste bzw. zweite Spieler handeln. Für jeden Spieler ist es vorteilhaft, so spät wie möglich zu handeln, vorausgesetzt, daß es ihm gelingt, seinem Gegner zuvorzukommen. SHIFFMAN [12] und KARLIN [8] haben bewiesen, daß es bei Zeitspielen stets gute Strategien für beide Spieler gibt, wenn man voraussetzt, daß der Kern außerhalb der Hauptdiagonalen zweimal stetig differenzierbar und streng monoton ist. Wir kommen hier mit wesentlich schwächeren Voraussetzungen aus.

Das Spiel mit dem oben angegebenen Kern (3) heiße ein Duell. Wir zeigen nun zwei Anwendungen des Duells. Die erste dient gleichzeitig zur Erklärung des Namens.

(i) Jeder Spieler hat einen gewissen Munitionsvorrat, den er im Zeitintervall $[0;1]$ verschießen muß. Die Verteilung der Schußdichte über dieses Intervall bleibt seiner Wilikür überlassen und bildet seine Strategie. Wir nennen die beiden Spieler A und B. Verschießt A seinen gesamten Munitionsvorrat zur Zeit x, so sei seine Treffwahrscheinlichkeit $f(x)$. Verschießt B seinen gesamten Munitionsvorrat zur Zeit y, so sei seine Treffwahrscheinlichkeit $g(y)$. Dabei soll jeder Spieler nur dann zum Schuß kommen, wenn er noch nicht getroffen worden ist. Wenn also A zur Zeit x schießt und B zur Zeit y schießt, und wenn $x < y$ ist, so wird die Treffwahrscheinlichkeit für B gleich $\big(1-f(x)\big)\,g(y)$, während A die Treffwahrscheinlichkeit $f(x)$ hat. Bewertet A seinen Erfolg mit $+q$ und den Erfolg von B mit $-p$, so ist sein Erwartungswert

$$K(x;y) = q\,f(x) - p\,\big(1-f(x)\big)\,g(y) = q\,f(x) - p\,g(y) + p\,f(x)\,g(y),$$

wenn A zur Zeit x und B zur Zeit y schießt und außerdem $x<y$ ist. Entsprechend ergibt sich für $x>y$:

$$K(x;y)=q(1-g(y))f(x)-pg(y)=qf(x)-pg(y)-qf(x)g(y).$$

Für $x=y$ wird der Erwartungswert für A: $K(x;y)=qf(x)-pg(y)$. Zusammengefaßt ist also

$$K(x;y)=qf(x)-pg(y)\begin{cases}+pf(x)g(y) & \text{für } x<y\\ +0 & \text{für } x=y\\ -qf(x)g(y) & \text{für } x>y.\end{cases}$$

Da es bei der Bewertung offenbar nur auf das Verhältnis von q und p ankommt, so setzen wir $q=1$, also

$$K(x;y)=f(x)-pg(y)\begin{cases}+pf(x)g(y) & \text{für } x<y\\ +0 & \text{für } x=y\\ -f(x)g(y) & \text{für } x>y.\end{cases}$$

Auf diese Weise ergibt sich der Kern (3).

Der zweite Spieler hat im allgemeinen eine andere Bewertung als der erste Spieler, so daß das Spiel kein Nullsummen-Spiel wird. Setzen wir aber voraus, daß die Spieler nicht die Möglichkeit haben, miteinander zu verhandeln, oder daß die Verhandlungen gescheitert sind, so ist es für den ersten Spieler naheliegend, so zu handeln, als ob er sich in einem Nullsummen-Spiel befände. Die Deutung als Duell legt eine solche Haltung besonders nahe.

Im allgemeinen werden die beiden Spieler nicht alle ihre Munition auf einmal verschießen, sondern sie irgendwie im Intervall $[0;1]$ verteilen. Diese Häufigkeitsverteilungen sind die „Strategien" der Spieler (s. die Definition von Strategie auf S. 283).

Eine andere Möglichkeit, ein Duell als ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel zu behandeln, führen Danskin und Gillman in [4] aus.

(ii) Die zweite Anwendung behandelt das Problem der Werbung von zwei Kaufleuten (sie sollen A und B heißen) um einen Kunden. Der Widerstand des Kunden gegen die Werbung sei eine Funktion der Zeit. Wirbt A zur Zeit x, so sei die Kaufwahrscheinlichkeit des Kunden $f(x)$. Wirbt B zur Zeit y, so sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Kunde bei B kauft, gleich $g(y)$. Außerdem soll gelten: Wenn der Kunde schon bei A gekauft hat, so kauft er nicht mehr bei B und umgekehrt. A bewertet es mit $+1$, wenn der Kunde bei ihm kauft, und mit $-p$, wenn der Kunde bei B kauft. Der Erwartungswert für A, wenn er zur Zeit x wirbt und B zur Zeit y wirbt, ist dann wieder der Kern (3). Hier ist es freilich naheliegend, das Spiel nicht mehr als ein Nullsummen-Spiel zu behandeln, sondern anzunehmen, daß A und B den Kunden untereinander aushandeln und einer von beiden gegen Zahlung einer Kompensation an den anderen von diesem den Kunden überlassen bekommt. Zu dieser Anwendung vergleiche man Burger [2] und Gillman [6].

Wir werden die verschiedenen Deutungsmöglichkeiten nicht weiter diskutieren, sondern uns im folgenden stets an die Deutung als Duell halten und eine entsprechende Terminologie (z.B. Treffwahrscheinlichkeiten für die Funktionen f und g) gebrauchen.

§ 2. Eine Bedingung für die Konvergenz ε-guter Strategien

Wir interessieren uns für die Frage: Unter welchen Bedingungen konvergieren ε-gute Strategien gegen eine gute Strategie? Durch diese Frage werden wir darauf geführt, nach einem Kriterium für die Kompaktheit im Raum der Strategien zu suchen, wenn als Konvergenzbegriff die gleichmäßige Konvergenz benutzt wird. Da sich das gesuchte Kriterium (der Satz 2 dieses Paragraphen) genau so leicht für Funktionen beschränkter Schwankung aussprechen läßt wie für Strategien, so werden wir es in dieser etwas allgemeineren Form beweisen. Wir führen zuerst alle Definitionen und Sätze an, dann folgen die Beweise.

Wir betrachten Funktionen auf dem Intervall $[0;1]$. Die Abkürzung v. b. Sch. bedeutet „von beschränkter Schwankung". Als Norm führen wir den Höchstbetrag ein: $\|k\| = \sup_{x\in[0,1]} |k(x)|$; dann bedeutet $\|k_n - k\| \to 0$ die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $\{k_n\}$ gegen k. Wir schreiben dafür auch $k_n \Rightarrow k$. Eine Teilung $\mathfrak{T}$ ist eine endliche Punktmenge $\{x_i\}$: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_r = 1$.

Satz 1. *Zu jedem $k(x)$ v.b.Sch. und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Teilung $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\varepsilon, k)$ mit der Eigenschaft $|k(x') - k(x'')| < \varepsilon$ für $x_i < x'$, $x'' < x_{i+1}$ und $i = 0, 1, \ldots, r-1$.*

Wir bezeichnen eine solche Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon, k)$ als eine ε-Teilung.

Definition. *Eine Menge $\mathfrak{K}$ von Funktionen k heiße* gleichgradig *T-stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ gibt der Art, daß für alle $k \in \mathfrak{K}$ die Ungleichung $|k(x') - k(x'')| < \varepsilon$ gilt, sobald x' und x'' zwischen denselben Nachbarpunkten der Teilung liegen.*

Satz 2. *Sei $\mathfrak{K}$ eine unendliche Menge von Funktionen v.b.Sch. auf dem Intervall $[0, 1]$. Es seien alle Funktionen aus $\mathfrak{K}$ und die Gesamtschwankung aller Funktionen aus $\mathfrak{K}$ gleichmäßig beschränkt. Wenn $\mathfrak{K}$ gleichgradig T-stetig ist, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets eine Folge $\{k_n\}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion k_0 v.b.Sch. konvergiert.*

Dieser Satz, welcher dem Theorem von ARZELA-ASCOLI über gleichgradig stetige Funktionen (s. NATANSON [*10*] S. 433) entspricht, stellt das gesuchte Kompaktheitskriterium dar.

Satz 3. *Wenn $k_n \Rightarrow k$ und sowohl k_n als auch k v.b.Sch. ist, so gilt: $\{k_n\}$ ist gleichgradig T-stetig.*

Anwendung auf Strategien. *Sei $\{F_n\}$ eine gleichgradig T-stetige Folge von Strategien. Dann gibt es eine Teilfolge $\{F_{n'}\}$ und eine Strategie F so, daß $F_{n'} \Rightarrow F$. Umgekehrt folgt aus $F_n \Rightarrow F$, daß $\{F_n\}$ gleichgradig T-stetig ist.*

Satz 4. *Für eine Folge $\{F_n\}$ von Strategien ist $F_n \Rightarrow F$ gleichwertig mit*

$$(1) \qquad \begin{cases} \lim F_n(x) = F(x) \\ \lim F_n(x-0) = F(x-0) \\ \lim F_n(x+0) = F(x+0). \end{cases}$$

Einen Beweis hierzu findet man bei FRÉCHET [5], S. 274—276.

Satz 5. *Es gelte* $\lim \int k(x)\, dF_n(x) = \int k(x)\, dF(x)$ *für jede Funktion k v.b.Sch. und F und die F_n seien Strategien. Dann folgt: $F_n \Rightarrow F$. Umgekehrt folgt aus $F_n \Rightarrow F$, daß für jede Funktion k v.b.Sch. die Gleichung* $\lim \int k(x)\, dF_n(x) = \int k(x)\, dF(x)$ *gilt.*

Alle Integrale sind LEBESGUE-STIELTJES-Integrale. Vergleiche dazu etwa CRAMÉR [3] S. 33 u.f.

Anmerkung. Gewöhnlich betrachtet man den Fall, daß die Gleichung $\lim \int f(x)\, dF_n(x) = \int f(x)\, dF(x)$ für jede stetige Funktion $f(x)$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Gleichung $\lim F_n(x) = F(x)$ für jeden Stetigkeitspunkt der Verteilungsfunktion $F(x)$ erfüllt ist. Siehe dazu: CRAMÉR [3] S. 74, GNEDENKO-KOLMOGOROV [7] § 9, MCKINSEY [9] S. 177 und NATANSON [10] S. 237.

Wir werden nun die Sätze 1 bis 5 beweisen und sie anschließend auf die Frage der Konvergenz ε-guter Strategien gegen eine gute Strategie anwenden.

Beweis von Satz 1. Wir beweisen den Satz zunächst für monoton steigende Funktionen. Sei k monoton steigend, $k(0) = a$ und $k(1) = b$. Wir wählen eine ganze Zahl $n > 0$ so, daß $1/n < \varepsilon$ ist. Man bilde nun:

$$x_i = \inf \left\{ x \mid k(x) \geqq \frac{b-a}{n}\, i + a \right\}$$

für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Es kann vorkommen, daß mehrere aufeinanderfolgende x_i einander gleich sind. Wir wollen sie dann als einen Punkt zählen. Wir werden zeigen, daß diese x_i eine Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon, k)$ mit den in Satz 1 behaupteten Eigenschaften bilden. Aus $x_i < x' < x_{i+1}$ folgt nämlich

$$a + \frac{b-a}{n}\, i \leqq k(x') < a + \frac{b-a}{n}\, (i+1).$$

Genau dieselbe Ungleichung gilt für $k(x'')$, wenn $x_i < x'' < x_{i+1}$ ist. Dann ist aber $|k(x') - k(x'')| \leqq 1/n < \varepsilon$. Also bilden die x_i eine ε-Teilung.

Ist k monoton fallend, so ist offenbar die ε-Teilung der monoton steigenden Funktion $-k$ eine ε-Teilung für k.

Sei nun k v.b.Sch., also als Differenz zweier monotoner Funktionen p und q darstellbar: $k(x) = p(x) - q(x)$.

Wir bilden $\mathfrak{T}(\varepsilon, k) = \mathfrak{T}(\varepsilon/2, p) \cup \mathfrak{T}(\varepsilon/2, q)$, also diejenige Teilung, welche sowohl die Teilpunkte einer $\varepsilon/2$-Teilung von p als auch die Teilpunkte einer $\varepsilon/2$-Teilung von q enthält. Sind nun x_i und x_{i+1} aufeinanderfolgende Teilpunkte der Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon, k)$, dann gilt für $x_i < x'$, $x'' < x_{i+1}$ sowohl

$$|p(x') - p(x'')| < \varepsilon/2 \quad \text{als auch} \quad |q(x') - q(x'')| < \varepsilon/2.$$

Daraus folgt aber:

$$|k(x') - k(x'')| = |p(x') - p(x'') - q(x') + q(x'')| \leq |p(x') - p(x'')| + \\ + |q(x') - q(x'')| < \varepsilon.$$

Also ist $\mathfrak{T}(\varepsilon, k)$ eine ε-Teilung für die Funktion $k(x)$, und der Satz ist bewiesen.

Beweis von Satz 2. Nach dem Auswahlsatz von HELLY (s. NATANSON [*10*] S. 225) können wir aus der Menge $\mathfrak{M}$ eine Folge $\{k_n\}$ auswählen, welche in jedem Punkte des Intervalls $[0; 1]$ gegen eine Funktion k_0 v. b. Sch. konvergiert. Zum Beweise unseres Satzes brauchen wir also nur noch zu zeigen, daß diese Folge gleichmäßig gegen k_0 konvergiert.

Auf Grund der Voraussetzungen gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilung $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots x_r = 1$ so, daß für alle n die Ungleichung $|k_n(x') - k_n(x'')| < \varepsilon/3$ gilt, wenn nur $x_i < x', x'' < x_{i+1}$ ist. Setzen wir zur Abkürzung $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) = y_i$, so folgen die Gleichungen $\lim k_n(x_i) = k_0(x_i)$ (für $i = 0, 1, 2, \ldots, r$) und $\lim k_n(y_i) = k_0(y_i)$ ($i = 0, 1, \ldots, r-1$). Daher gibt es ein $N = N(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $n, m > N(\varepsilon)$ folgende Ungleichungen gelten: $|k_n(x_i) - k_m(x_i)| < \varepsilon$ (für $i = 0, 1, \ldots, r$) und $|k_n(y_i) - k_m(y_i)| < \varepsilon/3$ (für $i = 0, 1, \ldots, r-1$). Sei nun x beliebig im Intervall $[0; 1]$ vorgegeben. Wir wollen zeigen, daß $|k_n(x) - k_m(x)| < \varepsilon$ ist. Ist $x = x_i$, so sind wir fertig! Ist $x_i < x < x_{i+1}$, so gilt (für $n, m > N(\varepsilon)$): $|k_n(x) - k_m(x)| \leq |k_n(x) - k_n(y_i)| + |k_n(y_i) - k_m(y_i)| + |k_m(y_i) - k_m(x)| < \varepsilon$. Läßt man nun m nach Unendlich gehen, so folgt für $n > N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|k_n(x) - k_0(x)| \leq \varepsilon$, und zwar für jedes $x \in [0; 1]$. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Beweis von Satz 3. Da $k_n \Rightarrow k$ gilt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ der Art, daß $|k_n(x) - k(x)| < \varepsilon/3$ ist, und zwar für alle x und für alle $n > N(\varepsilon)$. Da k nach Voraussetzung v. b. Sch. ist, so gibt es nach Satz 1 eine $\varepsilon/3$-Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon/3, k)$. Sind x_i und x_{i+1} aufeinanderfolgende Teilpunkte von $\mathfrak{T}(\varepsilon/3, k)$, so gilt für $x_i < x'; x'' < x_{i+1}$ die Ungleichung $|k(x') - k(x'')| < \varepsilon/3$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{T}(\varepsilon/3, k)$ eine ε-Teilung für alle k_n mit $n > N(\varepsilon)$ ist. Es gilt nämlich für $x_i < x', x'' < x_{i+1}$ und $n > N(\varepsilon)$ die Abschätzung:

$$|k_n(x') - k_n(x'')| \leq |k_n(x') - k(x')| + |k(x') - k(x'')| + |k(x'') - k_n(x'')| < \varepsilon.$$

Folglich ist $\mathfrak{T}(\varepsilon/3, k)$ eine ε-Teilung für alle k_n mit $n > N(\varepsilon)$. Nehmen wir nun die Teilpunkte der endlich vielen Teilungen $\mathfrak{T}(\varepsilon, k_n)$ mit $n \leq N(\varepsilon)$ zu der Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon/3, k)$ hinzu, so erhalten wir eine ε-Teilung für alle k_n. Also ist $\{k_n\}$ gleichgradig T-stetig.

Zur Anwendung auf Strategien. Für jede Strategie F_n gilt: $F_n(x) = 0$ für $x < 0$ und $F_n(x) = 1$ für $x \geq 1$. Außerhalb des Intervalles $[0; 1]$ konvergiert also jede Folge von Strategien gleichmäßig. Da alle Strategien gleichmäßig beschränkt sind, und ihre Gesamtschwankungen gleich eins, also ebenfalls gleichmäßig beschränkt sind, so können wir für $x \in [0; 1]$ den Satz 2 anwenden. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Grenzfunktion ebenfalls eine Strategie ist. Da alle F_n monoton steigen, so steigt auch F monoton. Ferner ist (auf Grund von Satz 4): $F(x + 0) = \lim F_n(x + 0) = \lim F_n(x) = F(x)$. $F(x)$ ist also ebenfalls eine Strategie.

Beweis von Satz 4. (Nach Fréchet [5] S. 274 bis 276.) 1. Es gelte (1). Wir wollen zeigen: $F_n \Rightarrow F$. Die Teilpunkte der $\varepsilon/2$-Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon/2, F)$ seien x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$. Es gelten dann für $x_i < x < x_{i+1}$ die Ungleichungen:

$$F(x_{i+1} - 0) - \varepsilon/2 \leqq F(x) \leqq F(x_i + 0) + \varepsilon/2 = F(x_i) + \varepsilon/2.$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ so gewählt, daß $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon/2$ ist (für $i = 0, 1, \ldots, r$), und daß $|F_n(x_i - 0) - F(x_i - 0)| < \varepsilon/2$ ist (für $i = 1, 2, \ldots, r$). Dann gelten für $x_i < x < x_{i+1}$ folgende Ungleichungen:

$$F_n(x) - F(x) \leqq F_n(x_{i+1} - 0) - F(x) \leqq F_n(x_{i+1} - 0) - F(x_{i+1} - 0) + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

und

$$F_n(x) - F(x) \geqq F_n(x_i) - F(x) \geqq F_n(x_i) - F(x_i) - \varepsilon/2 > -\varepsilon.$$

Daraus folgt für $x_i < x < x_{i+1}$ die Ungleichung $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$. Diese Ungleichung gilt aber auch für $x = x_i$. (Sie gilt natürlich auch, wenn x nicht im Intervall $[0; 1]$ liegt.) Damit ist bewiesen: Aus (1) folgt $F_n \Rightarrow F$.

2. Es gelte $F_n \Rightarrow F$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N so, daß die Ungleichung $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und für alle x erfüllt ist. Damit gilt auch für alle δ die Ungleichung $|F_n(x \pm \delta) - F(x \pm \delta)| < \varepsilon$. Dann gelten aber die drei Gln. (1), und der Satz 4 ist bewiesen.

Beweis von Satz 5. Erster Teil: Aus

$$\lim \int k(x)\, dF_n(x) = \int k(x)\, dF(x) \tag{2}$$

für jede Funktion k v.b.Sch. folgt $F_n \Rightarrow F$. Sei

$$k_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leqq \xi \\ 0 & \text{für } x > \xi \end{cases} \quad \text{und} \quad k_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \xi \\ 0 & \text{für } x \geqq \xi. \end{cases}$$

Aus Gl. (2) folgt mit $k = k_1$ die Gleichung $\lim F_n(\xi) = F(\xi)$. Für $k = k_2$ ergibt sich $\lim F_n(\xi - 0) = F(\xi - 0)$. Ferner gilt: $F(x + 0) = F(x) = \lim F_n(x) = \lim F_n(x + 0)$. Die Gln. (1) aus Satz 4 sind erfüllt, also gilt $F_n \Rightarrow F$.

Zweiter Teil. Aus $F_n \Rightarrow F$, d.h. aus den Gln. (1) folgt (2). Es ist praktischer im nachfolgenden statt mit den Verteilungsfunktionen mit den zugehörigen Maßen zu arbeiten. μ_n sei das zur Strategie F_n gehörige Maß und μ gehöre zur Strategie F. Die erste und dritte Gleichung (1) lauten dann: $\lim \mu_n[0; x] = \mu[0; x]$ und $\lim \mu_n[0; x) = \mu[0; x)$. Zusammengefaßt folgt:

$$\lim \mu_n \mathfrak{J} = \mu \mathfrak{J}. \tag{3}$$

Dabei kann $\mathfrak{J}$ je nach Belieben ein Intervall der Form $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$ oder $(a; b)$ sein. Die zweite Gl. (1) sagt nur aus, daß $F(x)$ eine Strategie ist.

Sei nun $k(x)$ eine beliebige Funktion v.b.Sch. Wir wählen eine Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon/2, k)$: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$. Wir setzen: $S_0 = [x_0]$; $S_1 = (x_0, x_1)$; $S_2 = [x_2]$; $\ldots$ $S_{2\nu} = [x_\nu]$; $S_{2\nu+1} = (x_\nu, x_{\nu+1})$; $\ldots$ $S_{2r} = [x_r]$. Es gilt also: $|k(x') - k(x'')| < \varepsilon/2$ für $x', x'' \in S_i$. Sei nun $\bar{k}_i = \sup_{x \in S_i} k(x)$ und $\underline{k}_i = \inf_{x \in S_i} k(x)$. Dann folgt: $|\bar{k}_i - \underline{k}_i| \leqq \varepsilon/2$.

Die S_i sind meßbare Mengen und bilden eine Zerlegung des Intervalles $[0;1]$, d.h. es ist $[0;1]=\bigcup_{i=0}^{2r} S_i$ und $S_i \cap S_k = \varnothing$ für $i \neq k$. Dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{2r} \underline{k}_i \mu S_i \leqq \int k(x)\, d\mu \leqq \sum_{i=0}^{2r} \overline{k}_i \mu S_i$$

(s. CRAMÉR [3] S. 33—35).

Sei $K \geqq |k(x)|$ eine Schranke für $k(x)$. Auf Grund der Gl. (3) kann man erreichen, daß

$$|\mu S_i - \mu_n S_i| < \frac{\varepsilon}{4r K}$$

gilt, und zwar für alle $n > N(i)$. Da wir nur endlichviele $N(i)$ haben, so können wir N einheitlich für alle i wählen. Es folgt dann:

$$\sum_{i=0}^{2r} |\mu S_i - \mu_n S_i| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

für alle $n > N$.

Wir können jetzt die Ungleichungen

$$\sum \underline{k}_i \mu S_i = \underline{\sum} \leqq \int k(x)\, d\mu \leqq \overline{\sum} = \sum \overline{k}_i \mu S_i$$

und

$$\sum \underline{k}_i \mu_n S_i = \underline{\sum}_n \leqq \int k(x)\, d\mu_n \leqq \overline{\sum}_n = \sum \overline{k}_i \mu_n S_i$$

auswerten. Aus diesen Ungleichungen folgt nämlich:

$$\int k(x)\, d\mu - \int k(x)\, d\mu_n = \Delta \leqq \overline{\sum} - \underline{\sum}_n = A$$

und

$$\int k(x)\, d\mu_n - \int k(x)\, d\mu = -\Delta \leqq \overline{\sum}_n - \sum = B,$$

also $|\Delta| \leqq \max(A; B)$. Die Gl. (2), oder $|\Delta| \to 0$, ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß $A \to 0$ und $B \to 0$ gilt. Wir führen nur den Fall $A \to 0$ vor ($B \to 0$ folgt auf die gleiche Weise). Sei $n > N$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} A \leqq |\Delta| &= |\sum \overline{k}_i \mu S_i - \sum \underline{k}_i \mu S_i + \sum \underline{k}_i \mu S_i - \sum \underline{k}_i \mu_n S_i| \leqq \\ &\leqq \sum |\overline{k}_i - \underline{k}_i| \mu S_i + |\sum \underline{k}_i (\mu S_i - \mu_n S_i)| \leqq \\ &\leqq \varepsilon/2 + K \cdot \sum |\mu S_i - \mu_n S_i| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz 5 bewiesen.

Wir geben zur Erläuterung ein Beispiel, in welchem eine der Bedingungen verletzt ist. Sei

$$F_n(x) = I_{\frac{1}{2}-1/n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < \frac{1}{2} - 1/n \\ 1 & \text{für} \quad x \geqq \frac{1}{2} - 1/n. \end{cases}$$

Dann ist $\lim F_n(x) = F(x) = I_{\frac{1}{2}}(x)$, aber die Bedingung $\lim F_n(x-0) = F(x-0)$ ist für $x = \frac{1}{2}$ nicht erfüllt, denn $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(\frac{1}{2}-0) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{\delta\to 0} F_n(\frac{1}{2}-\delta) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

und $F(\frac{1}{2}-0)=\lim\limits_{\delta\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}F_n(\frac{1}{2}-\delta)=\lim\limits_{\delta\to 0}0=0$. Wählt man nun

$$k(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{für } x\geqq\frac{1}{2},\end{cases}\qquad \text{so gilt für alle } n$$

$$\int k(x)\,dF_n(x)=1 \qquad \text{während} \qquad \int k(x)\,dF(x)=0$$

ist.

Als Anwendung der Sätze dieses Paragraphen auf die Theorie der Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele auf dem Einheitsquadrat beweisen wir nun den

Satz 6. *Gegeben sei ein Spiel, welches einen Wert v besitzt. Der Kern $K(x;y)$ des Spieles sei für festes y eine Funktion v.b.Sch. in x. Es sei ferner $\{F_\varepsilon\}$ (mit $\varepsilon\to 0$) eine Folge ε-guter Strategien des ersten Spielers. (Es ist also:*

$$\int K(x;y)\,dF_\varepsilon(x)\geqq v-\varepsilon.)$$

Dann gilt: Wenn $\{F_\varepsilon\}$ gleichgradig T-stetig ist, so gibt es eine Teilfolge $\{F_{\varepsilon'}\}$ mit $\varepsilon'\to 0$, welche gegen eine gute Strategie des ersten Spielers konvergiert.

Beweis. Auf Grund von Satz 3 wissen wir, daß es in der Folge $\{F_\varepsilon\}$ eine Teilfolge $\{F_{\varepsilon'}\}$ mit $\varepsilon'\to 0$ gibt, so, daß $F_{\varepsilon'}\Rightarrow F$ gilt. Der Satz 5 liefert dann die Gleichung $\lim\limits_{\varepsilon'\to 0}\int K(x;y)\,dF_{\varepsilon'}(x)=\int K(x;y)\,dF(x)$ und da $\int K(x;y)\,dF_{\varepsilon'}(x)\geqq v-\varepsilon'$ ist, so folgt $\int K(x;y)\,dF(x)\geqq v$.
Damit ist gezeigt, daß $\lim\limits_{\varepsilon'\to 0}F_{\varepsilon'}(x)=F(x)$ eine gute Strategie für den ersten Spieler ist.

In den folgenden Paragraphen wollen wir untersuchen, für welche Klassen von Duellen (ein Duell ist in § 1 auf S. 284 erklärt) die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt sind.

§ 3. Einige Sätze über Duelle

Wir möchten die Ergebnisse von § 2 auf Duelle anwenden. Bevor wir uns im nächsten Paragraphen mit ε-guten Strategien beschäftigen können, müssen wir einige Sätze über die Struktur von Duellen herleiten.

Das Duell sei gegeben durch seinen Kern $K(x;y)$:

$$(1)\qquad K(x;y)=f(x)-p\,g(y)\begin{cases}+p\,f(x)\,g(y) & \text{für } x<y\\ +0 & \text{für } x=y\\ -f(x)\,g(y) & \text{für } x>y.\end{cases}$$

Dabei gelte: $0\leqq f;g\leqq 1$; $p\geqq 0$; f und g seien monoton steigend und von rechts stetig. Wir sprechen dann von einem monotonen Duell. Diese Voraussetzungen sollen für den ganzen § 3 gelten.

Wir setzen nun fest:

$$\int_{[0,a)}^{a} f\,dF=\int_{[0,a)} f\,dF,\qquad \int f\,dF=\int_{[0,1]} f\,dF.$$

Strategien für den ersten Spieler bezeichnen wir stets mit F, Strategien für den zweiten Spieler mit G. Es sei

$$U(F;y) = \int K(x;y)\,dF(x) = \int f\,dF - g(y)\{p + \int f\,dF + (1+p)\cdot\int^{y} f\,dF + f(y)\,\sigma_F(y)\};$$

$$V(x;G) = \int K(x;y)\,dG(y) = -p\int g\,dG + f(x)\{1 + p\int g\,dG - (1+p)\cdot\int^{x} g\,dG - p\,g(x)\,\sigma_G(x)\}.$$

Dabei sind $\sigma_F(x) = F(x) - F(x-0)$ und $\sigma_G(y) = G(y) - G(y-0)$ die Sprünge der Funktionen F und G.

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 7. *Sei* $f(x) = 0$ *für* $x < a$ *und*

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ F(x) & \text{für } x \geq a, \end{cases}$$

dann gilt: $U(F^*;y) \geq U(F;y)$.

Satz 8. *Sei* $f(x) = c$ *für* $a \leq x < b$ *und*

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x) & \text{für } x < a \\ F(b-0) & \text{für } a \leq x < b \\ F(x) & \text{für } b \leq x, \end{cases}$$

dann gilt: $U(F^*;y) \geq U(F;y)$.

Diese zwei Sätze legen es nahe, eine „im wesentlichen vollständige Klasse" von Strategien einzuführen (essentially complete class: s. BLACKWELL-GIRSHICK [1] Def. 5.4.10, S. 137). Eine Klasse $\mathfrak{C}$ von Strategien heißt im wesentlichen vollständig, wenn es zu jeder Strategie F, welche nicht in $\mathfrak{C}$ liegt, eine Strategie F^* in $\mathfrak{C}$ gibt, welche wenigstens ebensogut wie die Strategie F ist, d.h. es soll gelten: $U(F^*;y) \geq U(F;y)$.

Definition. *Für ein monotones Duell gelte* $F \in \mathfrak{C}_1$ *genau dann, wenn* $F(x) = 0$ *für* $x < \sup\{\xi \mid f(\xi) = 0\}$ *ist und wenn ferner* $\int_{(a,b)} dF = 0$ *gilt, falls* $f(x) = c$ *für* $a \leq x < b$ *ist.*

Es sollen also für die Strategien der Klasse $\mathfrak{C}_1$ die in den Sätzen 7 und 8 beschriebenen Reduktionen schon durchgeführt sein. $\mathfrak{C}_1$ ist eine im wesentlichen vollständige Klasse, so daß wir uns bei Fragen, welche gute oder ε-gute Strategien des ersten Spielers betreffen, stets auf die Betrachtung der Strategien der Klasse $\mathfrak{C}_1$ beschränken können.

Die Sätze 7 und 8 können wir auch beweisen, wenn darin die Rollen des ersten und zweiten Spielers vertauscht werden. Wir können daher für die Strategien des zweiten Spielers die im wesentlichen vollständige Klasse $\mathfrak{C}_2$ definieren.

Definition. *Für ein monotones Duell gelte* $G \in \mathfrak{C}_2$ *genau dann, wenn* $G(y) = 0$ *für* $y < \sup\{\eta \mid g(\eta) = 0\}$ *ist und wenn ferner* $\int_{(a,b)} dG = 0$ *gilt, falls* $g(y) = c$ *für* $a \leq y < b$ *ist.*

Beweis von Satz 7. $F^*(x)$ ist eine Strategie, welche das Intervall $[0; a)$ nicht mit Gewicht belegt. Für $y > a$ gilt:

$$\int_0^y f\,dF^* = f(a)F(a) + \int_{(a,y)} f\,dF \quad \text{und} \quad \int_0^y f\,dF = f(a)\cdot\{F(a)-F(a-0)\} + \int_{(a,y)} f\,dF.$$

Also gilt für alle y die Ungleichung $\int_0^y f\,dF^* \geq \int_0^y f\,dF$. Genau so folgt

$$\int f\,dF^* \geq \int f\,dF \quad \text{und} \quad f(x)\,\sigma_{F^*}(x) \geq f(x)\,\sigma_F(x).$$

Nun ist aber

$$U(F;y) = (1-g(y))\int f\,dF - p\,g(y) + (1+p)\,g(y)\cdot\int_0^y f\,dF + f(y)\,g(y)\,\sigma_F(y)$$

und

$$U(F^*;y) = (1-g(y))\int f\,dF^* - p\,g(y) + (1+p)\,g(y)\cdot\int_0^y f\,dF^* + f(y)\,g(y)\,\sigma_{F^*}(y).$$

Da die Ausdrücke $\int f\,dF$, $\int_0^y f\,dF$ und $f(y)\,\sigma_F(y)$ stets mit Faktoren auftreten, welche größer oder gleich Null sind, so folgt $U(F^*;y) \geq U(F;y)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis von Satz 8. $F^*(x)$ ist eine Strategie, welche das Intervall $(a; b)$ nicht mit Gewicht belegt. Es gilt:

$$\int f\,dF^* = \int_0^a dF^* + f(a)\{F^*(b-0) - F^*(a-0)\} + \int_{[b,1]} f\,dF^* =$$
$$= \int_0^a f\,dF + f(a)\{F(b-0) - F(a-0)\} + \int_{[b,1]} f\,dF = \int f\,dF.$$

Wir können jetzt den Ausdruck

$$U(F^*;y) = \int f\,dF - g(y)\{p + \int f\,dF\} + (1+p)\,g(y)\cdot\int_0^y f\,dF^* + f(y)\,g(y)\,\sigma_{F^*}(y)$$

mit dem Ausdruck

$$U(F;y) = \int f\,dF - g(y)\{p + \int f\,dF\} + (1+p)\,g(y)\cdot\int_0^y f\,dF + f(y)\,g(y)\,\sigma_F(y)$$

vergleichen. Es ist $U(F^*;y) \geq U(F;y)$ genau dann, wenn

$$(1+p)\cdot\int_0^y f\,dF^* + f(y)\,\sigma_{F^*}(y) \geq (1+p)\cdot\int_0^y f\,dF + f(y)\,\sigma_F(y)$$

ist.

Wir unterscheiden nun die drei Fälle $y \notin [a; b)$, $y \in (a; b)$ und $y = a$.

Für $y \notin [a; b)$ gilt offenbar in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen.

Für $y \in (a; b)$ folgt:

$$(1+p)\cdot\int_0^y f\,dF^* + f(y)\,\sigma_{F^*}(y) = (1+p)\cdot\int_0^a f\,dF + (1+p)\,f(a)\int_{[a,b)} f\,dF$$
$$\geq (1+p)\cdot\int_0^y f\,dF + f(y)\,\sigma_F(y).$$

Für $y=a$ folgt:

$$(1+p)\cdot\int^{a} f\,dF^{*}+f(a)\,\sigma_{F^{*}}(a)=(1+p)\cdot\int^{a} f\,dF+f(a)\int_{[a,b)}dF$$
$$\geqq(1+p)\cdot\int^{a} f\,dF+f(a)\,\sigma_{F}(a).$$

Also ist $U(F^{*};y)\geqq U(F;y)$ und der Satz ist bewiesen.

In Zukunft werden wir immer annehmen, daß unsere Strategien in den Klassen $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ liegen.

Bei den folgenden Entwicklungen setzen wir voraus, daß es gute Strategien für beide Spieler geben soll. Wir möchten die Funktion g abändern, und zwar wie folgt:

$$g^{*}(y)=\begin{cases}0 & \text{für } y<a\\ g(y) & \text{für } y\geqq a.\end{cases}$$

Dabei wollen wir versuchen, den Punkt a so zu wählen, daß gute Strategien in dem Duell mit g^{*} auch gute Strategien in dem Duell mit g sind. Außerdem soll für $y\in[a;1]$ gelten: $g^{*}(y)\geqq\alpha>0$.

Satz 9. *Zu jedem monotonen Duell* mit $p\neq 0$ *kann man eine Zahl* $a\in[0;1]$ *und ein monotones Duell mit der Treffwahrscheinlichkeit*

$$g^{*}(y)=\begin{cases}0 & \textit{für } y<a\\ g(y) & \textit{für } y\geqq a\end{cases}$$

für den zweiten Spieler angeben, so daß $g^{*}(y)\geqq\alpha>0$ *für* $y\geqq a$ *gilt und die guten Strategien (aus den Klassen* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$*) des Duells mit* g^{*} *auch gute Strategien des Duells mit* g *sind.*

Beweis. Sei $\sup\{y\,|\,g(y)=0\}=y_0$. Wenn $g(y_0)>0$ ist, so hat g schon die gewünschte Form. Wir nehmen daher an $g(y_0)=0$. Man bilde:

$$\sup\{g(y)\,(1-f(y))\}=s.$$

Zunächst zeigen wir, daß $s=0$ auf ein triviales Spiel führt. Aus $s=0$ folgt $f(x)=1$ für $x>y_0$. Da f von rechts stetig ist, so gilt auch $f(y_0)=1$. Ein monotones Duell mit $f(y_0)=1$ und $g(y_0)=0$ ist aber leicht zu lösen. $F(x)=I_{y_0}(x)$ ist eine gute Strategie für den ersten Spieler und es ist $U(I_{y_0};y)=1=v$ für alle y. Für den zweiten Spieler ist jede Strategie gut, da $K(x;y)\leqq 1=v$ ist. Schließt man dieses Duell als uninteressant von den Betrachtungen aus, so darf man $s>0$ voraussetzen. Es gibt dann ein $y_1>y_0$, für das

$$g(y_1)\,(1-f(y_1))=c>0$$

ist. Da g von rechts stetig ist, so gibt es ein a, für das $y_0<a\leqq y_1$ und $0=g(y_0)<g(a)\leqq pc/(1+p)$ gilt. Mit einem so bestimmten a definieren wir nun:

$$g^{*}(y)=\begin{cases}0 & \text{für } y<a\\ g(y) & \text{für } y\geqq a.\end{cases}$$

Seien nun F und G ein Paar guter Strategien für das Spiel mit g^*. Die Ausdrücke $U(F;y)$ und $V(x;G)$ sollen sich auf das gegebene Duell beziehen und die Ausdrücke $U^*(F;y)$ und $V^*(x;G)$ auf das neu konstruierte Duell. Es sei also: $U^*(F;y) \geqq v^* \geqq V^*(x;G)$. Wir wollen zeigen, daß $U(F;y) \geqq v^* \geqq V(x;G)$ gilt.

Es ist $V(x;G) = V^*(x;G)$, denn das Intervall, in welchem g und g^* voneinander verschieden sind, hat nach Voraussetzung (G sollte in $\mathfrak{C}_2$ liegen) das G-Maß Null. Ferner gilt $U(F;y) = U^*(F;y)$ für $y \geqq a$, denn dann ist ja $g = g^*$. Wenn wir noch zeigen können, daß für $y < a$ die Ungleichung $U(F;y) \geqq v^*$ gilt, so ist der Satz 9 bewiesen. Für $y < a$ folgt:

$$\begin{aligned} U(F;y) &= \int f\,dF - g(y)\{p + \int f\,dF - (1+p)\cdot\int^{y} f\,dF - f(y)\,\sigma_F(y)\} \\ &\geqq \int f\,dF - g(a)\{1+p\} \geqq \int f\,dF - p\,g(y_1)\{1 - f(y_1)\} \\ &\geqq \int f\,dF - g(y_1)\{p - p\,f(y_1) + \int f\,dF - \int^{y_1} f\,dF - f(y_1)\,\sigma_F(y_1)\} \\ &\geqq \int f\,dF - g(y_1)\{p + \int f\,dF - (1+p)\cdot\int^{y_1} f\,dF - f(y_1)\,\sigma_F(y_1)\} \\ &= U(F;y_1) = U^*(F;y_1) \geqq v^*. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Genau so zeigt man den

Satz 10. *Zu jedem monotonen Duell mit $p \neq 0$ und der Treffwahrscheinlichkeit f für den ersten Spieler kann man ein monotones Duell mit der Treffwahrscheinlichkeit f^* für den ersten Spieler angeben, so daß entweder $f^*(x) = 0$ oder $f^*(x) \geqq \alpha > 0$ ist und die guten Strategien (aus den Klassen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$) des Duells mit f^* auch gute Strategien des Duells mit f sind.*

Anmerkung. Beim Beweise von Satz 10 (nicht aber beim Beweise von Satz 9) kann man die Voraussetzung $p \neq 0$ streichen.

Definition. *Ein α-Duell ist ein monotones Duell mit $f(x) = 0$ für $x < a_1$, $f(x) \geqq \alpha_1 > 0$ für $x \geqq a_1$, $g(y) = 0$ für $y < a_2$ und $g(y) \geqq \alpha_2 > 0$ für $y \geqq a_2$.*

Man kann die Sätze 9 und 10 zusammenfassen zu

Satz 11. *Zu jedem monotonen Duell mit $p \neq 0$ kann man ein α-Duell angeben der Art, daß die guten Strategien dieses α-Duells (aus den Klassen $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$) auch gute Strategien in dem gegebenen Duell sind.*

Beim Beweise von Satz 9 war

$$g(a) \leqq \frac{p}{1+p}\, g(y_1)\,(1 - f(y_1)) \quad \text{mit} \quad y_1 \geqq a. \tag{2}$$

Es gilt nun

Satz 12. *Sei $g(y) = 0$ für $y < a$ und*

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ F(x) & \text{für } x \geqq a. \end{cases}$$

Ferner gelte (2). Dann folgt aus $U(F;y) \geqq v$ die Ungleichung $U(F^*;y) \geqq v$, d.h. wenn F eine gute Strategie ist, so ist auch F^* eine gute Strategie.

Beweis. Es ist $\int f\,dF^* \geqq \int f\,dF$ und, sofern nur $y > a$ ist, auch

$$\int_{-\infty}^{y} f\,dF^* \geqq \int_{-\infty}^{y} f\,dF \quad \text{und} \quad \sigma_{F^*}(y) \geqq \sigma_F(y).$$

Der Vergleich von $U(F^*; y)$ mit $U(F; y)$ liefert dann — genau so wie beim Beweise von Satz 7 auf S. 293 — für $y > a$ die Ungleichung $U(F^*; y) \geqq U(F; y) \geqq v$. Für $y < a$ folgt:

$$U(F^*; y) = \int f\,dF^* \geqq \int f\,dF = U(F; y) \geqq v.$$

Ist schließlich $y = a$, so folgt:

$$\begin{aligned} U(F^*; a) &= \int f\,dF^* - g(a)\{p + \int f\,dF^* - f(a)\,\sigma_{F^*}(a)\} \\ &\geqq \int f\,dF^* - \frac{p}{1+p}\,g(y_1)\,(1 - f(y_1))\,\{1 + p\} \\ &\geqq \int f\,dF - g(y_1)\{p - p f(y_1) + \int f\,dF - \int_{-\infty}^{y_1} f\,dF - f(y_1)\,\sigma_F(y_1)\} \\ &\geqq \int f\,dF - g(y_1)\{p + \int f\,dF - (1+p)\cdot \int_{-\infty}^{y_1} f\,dF - f(y_1)\,\sigma_F(y_1)\} \\ &= U(F; y_1) \geqq v. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 12 bewiesen.

Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich der Beweis von

Satz 13. *Zu einem monotonen Duell mit $p \neq 0$ und* stetigem *g läßt sich ein α-Duell angeben der Art, daß eine gute Strategie F aus diesem α-Duell die Eigenschaft $\int_{-\infty}^{a} dF = 0$ hat. Dabei ist $a = \sup\{x \mid f^*(x)\, g^*(x) = 0\}$. Außerdem ist F auch eine gute Strategie in dem gegebenen Duell.*

Beweis. Bei dem α-Duell sei $f^*(x) = 0$ für $x < a_1$, $f^*(x) \geqq \alpha_1 > 0$ für $x \geqq a_1$, $g^*(y) = 0$ für $y < a_2$ und $g^*(y) \geqq \alpha_2 > 0$ für $y \geqq a_2$. Ferner sei

$$a = \max(a_1; a_2) = \sup\{x \mid f^*(x)\, g^*(x) = 0\}.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0$ voraussetzen.

Wenn $a = a_1$ ist, so folgt $\int_{-\infty}^{a} dF = 0$ aus Satz 7, S. 292. Wenn $a = a_2$ ist, so folgt aus dem Beweis von Satz 9 auf S. 294, daß die Ungleichung (2) gilt. Wir können also nach Satz 12 schließen, daß $\int_{-\infty}^{a} dF = 0$ ist. Durch die Voraussetzung, daß g stetig sein soll, wird ausgeschlossen, daß man bei der Konstruktion des α-Duelles einfach $g^* = g$ setzen kann, denn dann brauchte ja die Ungleichung (2) nicht erfüllt zu sein.

Anmerkung. Die Sätze 9 bis 13 gelten auch dann noch, wenn man den Begriff „gut" durch den Begriff „ε-gut" ersetzt.

Die hier hergeleiteten Sätze werden wir zur Untersuchung der Frage, ob eine Menge von ε-guten Strategien gleichgradig T-stetig ist, gebrauchen. Vorher müssen wir uns aber überlegen, daß das Duell einen Wert hat und wie wir an ε-gute Strategien kommen können. Dazu dient der nächste Paragraph.

Ergänzung zu Satz 9. Beim Beweise von Satz 9 hatten wir ein Duell, für welches es ein x_0 mit der Eigenschaft $f(x_0)=1$ und $g(x_0)=0$ gab, von den weiteren Betrachtungen ausgeschlossen. Bei einem solchen Duell gilt natürlich der Satz 9 ebenfalls. Wie man auch $g(y)$ für $y>x_0$ abändert, in jedem Falle bleibt der Wert des Spieles $v=1$, und jede Strategie bleibt für den zweiten Spieler eine gute Strategie.

§ 4. Die Konstruktion ε-guter Strategien

Wir wollen zeigen, daß unser Duell einen Wert v hat, d.h. daß die Gleichung $\sup_F \inf_G M(F;G) = \inf_G \sup_F M(F;G)$ gilt. Der Beweis liefert gleichzeitig ein Konstruktionsverfahren für ε-gute Strategien.

Wir behandeln auch hier nur monotone Duelle, auf den allgemeinen Fall kommen wir in § 6 zurück.

Definition. *Ein* endliches Duell *ist ein endliches Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel mit der Matrix* $(K_{\mu\nu})$:

$$K_{\mu\nu}=f_\mu-p\,g_\nu\begin{cases}+p\,f_\mu g_\nu & \text{für } \mu<\nu\\ +0 & \text{für } \mu=\nu\\ -f_\mu g_\nu & \text{für } \mu>\nu.\end{cases}\tag{1}$$

Dabei sei $\mu,\nu=0,1,\dots,r$ *und* $0\leqq f_\mu;\ g_\nu\leqq 1$, *ferner* $p\geqq 0$, $f_\mu\geqq f_{\mu-1}$ *und* $g_\nu\geqq g_{\nu-1}$.

Nach dem Hauptsatz der Theorie der endlichen Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele (s. v. Neumann-Morgenstern [11] § 17.6, S. 153; McKinsey [9] 2, 3, S. 31; Blackwell-Girshick [1] 2.3.1, S. 41) hat das endliche Spiel einen Wert sowie gute Strategien für beide Spieler. Wir wollen ein endliches Duell betrachten, welches auf eine noch näher zu erläuternde Art das Duell auf dem Einheitsquadrat approximiert.

Gegeben sei ein monotones Duell durch seinen Kern $K(x;y)$. Der Kern soll den gleichen Voraussetzungen wie unter Formel (1) in § 3 auf S. 291 genügen. Es sollen also die Funktionen f und g von rechts stetig sein. Dann gibt es aber eine gemeinsame Teilung $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}(\varepsilon)$ $(0=x_0<x_1<\cdots<x_\nu<\cdots<x_r=1)$ mit folgenden Eigenschaften: Aus $x_\nu\leqq x<x_{\nu+1}$ folgt

$$|f(x_\nu)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{und} \quad |g(x_\nu)-g(x)|<\varepsilon.$$

Wir setzen nun $f(x_\nu)=f_\nu$ und $g(x_\nu)=g_\nu$. Auf diese Weise erhalten wir ein endliches Duell mit der Matrix (1). Sein Wert sei $v^{(\varepsilon)}$, und es sei $\xi=(\xi_0\dots\xi_r)$ eine gute Strategie für den ersten und $\eta=(\eta_0\dots\eta_r)$ eine gute Strategie für den zweiten Spieler. Es gilt also:

$$\sum_{\mu=0}^{r} K_{\mu\nu}\xi_\mu\geqq v^{(\varepsilon)} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{r} K_{\mu\nu}\eta_\nu\leqq v^{(\varepsilon)}.$$

Wir definieren nun:

$$I_{x_\nu}(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x<x_\nu\\ 1 & \text{für } x\geqq x_\nu,\end{cases}$$

und setzen $F_\varepsilon(x) = \sum_0^r \xi_\nu I_{x_\nu}(x)$. Für $y = x_\nu$ gilt dann:

$$U(F_\varepsilon; y) = \sum f_\mu \xi_\mu - g_\nu \{p + \sum f_\mu \xi_\mu\} + (1+p)\, g_\nu \sum_0^{\nu-1} f_\mu \xi_\mu + f_\nu g_\nu \xi_\nu = \sum K_{\mu\nu} \xi_\mu \geqq v^{(\varepsilon)},$$

also:

$$U(F_\varepsilon; x_\nu) \geqq v^{(\varepsilon)}. \tag{2}$$

Ferner wird für $y \in (x_\nu; x_{\nu+1})$:

$$U(F_\varepsilon; y) - \sum K_{\mu\nu} \xi_\mu = -\{g(y) - g_\nu\} \cdot \Big\{p + \sum f_\mu \xi_\mu - (1+p) \sum_0^\nu f_\mu \xi_\mu\Big\} +$$

$$+ p f_\nu g_\nu \xi_\nu \geqq -\{g(y) - g_\nu\} \cdot \Big\{p + \sum f_\mu \xi_\mu - (1+p) \sum_0^\nu f_\mu \xi_\mu\Big\}.$$

Berücksichtigt man nun:

$$0 \leqq \{g(y) - g_\nu\} \cdot \Big\{p + \sum f_\mu \xi_\mu - (1+p) \sum_0^\nu f_\mu \xi_\mu\Big\} \leqq \{g(y) - g_\nu\} \cdot \{1+p\} \leqq (1+p)\,\varepsilon,$$

so folgt:

$$U(F_\varepsilon; y) - \sum K_{\mu\nu} \xi_\mu \geqq -(1+p)\,\varepsilon.$$

Zusammen mit $\sum K_{\mu\nu} \xi_\mu \geqq v^{(\varepsilon)}$ ergibt sich dann:

$$U(F_\varepsilon; y) \geqq v^{(\varepsilon)} - (1+p)\,\varepsilon.$$

Wegen (2) gilt damit für alle $y \in [0; 1]$ die Ungleichung

$$U(F_\varepsilon; y) \geqq v^{(\varepsilon)} - (1+p)\,\varepsilon. \tag{3}$$

Bildet man $G_\varepsilon(y) = \sum_0^r \eta_\nu I_{x_\nu}(y)$, so folgt durch eine entsprechende Rechnung:

$$V(x; G_\varepsilon) \leqq v^{(\varepsilon)} + (1+p)\,\varepsilon. \tag{4}$$

Auf Grund der Ungleichungen (3) und (4) können wir nun den Beweis für die Gl. (2) aus § 1, also für

$$\sup_F \inf_G \int\int K(x; y)\, dF(x)\, dG(y) = \inf_G \sup_F \int\int K(x; y)\, dF(x)\, dG(y)$$

führen. Es ist

$$v_1 = \sup_F \inf_G \int\int K(x; y)\, dF(x)\, dG(y) \geqq \inf_G \int U(F_\varepsilon; y)\, dG(y)$$
$$= \inf_y U(F_\varepsilon; y) \geqq v^{(\varepsilon)} - (1+p)\,\varepsilon.$$

Daraus folgt: $v_1 \geqq v^{(\varepsilon)} - (1+p)\,\varepsilon$. Genau so ergibt sich:

$$v_2 = \inf_G \sup_F \int\int K(x; y)\, dF(x)\, dG(y) \leqq v^{(\varepsilon)} + (1+p)\,\varepsilon.$$

Da immer $v_1 \leqq v_2$ gilt, so ist:

$$v^{(\varepsilon)} - (1+p)\,\varepsilon \leqq v_1 \leqq v_2 \leqq v^{(\varepsilon)} + (1+p)\,\varepsilon. \tag{5}$$

Die Menge der $v^{(\varepsilon)}$ ist beschränkt, denn aus der Definition von $K(x; y)$ folgt, daß $-p \leqq v^{(\varepsilon)} \leqq +1$ gilt. Wir können daher eine Teilfolge herausgreifen der

Art, daß $\lim v^{(\varepsilon)} = v$ für $\varepsilon \to 0$ gilt. Aus (5) folgt dann: $v_1 = v_2 = v$. Dies ist aber die gewünschte Gleichung. Damit gilt:

Satz 14. *Das monotone Duell hat stets einen Wert.*

Wir haben bei diesem Beweise aber noch mehr erhalten. Aus (3) und (5) folgt $U(F_\varepsilon; y) \geqq v - \varepsilon'$, wobei $\varepsilon' = 2(1+p)\varepsilon$ ist. Entsprechend läßt sich zeigen: $V(x; G_\varepsilon) \leqq v + \varepsilon'$. Die guten Strategien eines geeignet gewählten endlichen Spieles haben uns also ε-gute Strategien für unser Duell geliefert. Diese ε-guten Strategien können wir stets so wählen, daß für sie gilt

Satz 15. *Die Strategie* $F_\varepsilon(x) = \sum_0^r \xi_\nu I_{x_\nu}(x)$ *hat folgende Eigenschaften: Aus* $f_\nu = 0$ *folgt* $\xi_\nu = 0$, *und aus* $f_\nu = f_{\nu-1}$ *folgt* $\xi_\nu = 0$.

Beweis. Auch für endliche Duelle gelten die Sätze 7 und 8 aus § 3 (S. 292), denn wir können ein endliches Duell auffassen als ein Duell auf dem Einheitsquadrat, bei welchem die Treffwahrscheinlichkeiten von rechts stetige Treppenfunktionen sind. Wir können daher die in den Sätzen 7 und 8 aus § 3 beschriebenen Reduktionen auch für die guten Strategien des endlichen Spiels durchführen. Dann besitzen aber die dazugehörigen Strategien F_ε gerade diejenigen Eigenschaften, welche in Satz 15 behauptet werden.

Wir können stets erreichen, daß $F_\varepsilon \in \mathfrak{C}_1$ liegt, doch müssen wir dazu die Teilung $\mathfrak{T}(\varepsilon)$, welche der Konstruktion von F_ε zugrunde liegt, noch etwas abändern. Wir müssen nämlich immer dann, wenn ein Teilpunkt in ein Konstanz-Intervall der Funktion f fällt, auch den Anfangspunkt dieses Konstanz-Intervalles mit zur Teilung $\mathfrak{T}$ rechnen. Diese Abänderung sei in Zukunft stets durchgeführt. Es gilt dann:

Satz 16. *Für die oben konstruierte ε-gute Strategie F_ε gilt: $F_\varepsilon \in \mathfrak{C}_1$.*

Anmerkung. Wir können einen dem Satz 15 entsprechenden Satz über $G_\varepsilon(y)$ angeben. Es ist aber nicht immer möglich, gleichzeitig die beiden Bedingungen $F_\varepsilon \in \mathfrak{C}_1$ und $G_\varepsilon \in \mathfrak{C}_2$ zu erfüllen. Es können Schwierigkeiten auftreten, wenn sowohl f als auch g unendlichviele Konstanz-Intervalle besitzen.

§ 5. Die Konvergenz ϵ-guter Strategien bei α-Duellen

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß bei gewissen Klassen von α-Duellen eine passend gewählte Folge von ε-guten Strategien gleichgradig T-stetig ist, also eine Teilfolge enthält, welche gegen eine gute Strategie konvergiert.

Gegeben sei ein monotones Duell mit $p \neq 0$. Wir wollen die in § 4 konstruierten ε-guten Strategien des ersten Spielers für $\varepsilon = 2(1+p)/n$ mit F_n bezeichnen. Es sei also $F_n(x) = \sum \xi_\nu I_{x_\nu}(x)$, wobei die Punkte x_ν eine Teilung $\mathfrak{T}_n$ bilden, so daß jedenfalls $g(x_\nu - 0) - g(x_{\nu-1}) < 1/n$ ist. Für F_n gelten die Sätze 15 und 16 aus § 4 (S. 299), d.h. F_n liegt in $\mathfrak{C}_1$. Wir wollen voraussetzen, daß $\mathfrak{T}_n \subseteq \mathfrak{T}_{n+1}$ gilt, d.h. die Punkte der Teilung $\mathfrak{T}_n$ sollen auch alle in der Teilung $\mathfrak{T}_{n+1}$ vorkommen.

Wir benutzen die folgenden Abkürzungen (dabei lassen wir den Index n zur Vereinfachung der Schreibweise überall weg). $\xi=(\xi_0,\ldots,\xi_r)$ und $\eta=(\eta_0,\ldots,\eta_r)$ seien gute Strategien für den ersten bzw. zweiten Spieler in dem endlichen Duell. Es sei

$$U_\nu(\xi)=\sum_{\mu=0}^{r}K_{\mu\nu}\xi_\mu \quad \text{und} \quad V_\mu(\eta)=\sum_{\nu=0}^{r}K_{\mu\nu}\eta_\nu.$$

Ferner setzen wir

$$C=\sum_{\mu=0}^{r}f_\mu\xi_\mu \quad \text{und} \quad D=\sum_{\nu=0}^{r}g_\nu\eta_\nu.$$

Dann ist

$$U_\nu(\xi)=C-g_\nu\Big\{p+C-(1+p)\sum_{0}^{\nu-1}f_\mu\xi_\mu-f_\nu\xi_\nu\Big\}$$

und

$$V_\mu(\eta)=-pD+f_\mu\Big\{1+pD-(1+p)\sum_{0}^{\mu-1}g_\nu\eta_\nu-p\,g_\mu\eta_\mu\Big\}.$$

Der Wert des endlichen Duells heiße v, also gilt: $U_\nu(\xi)\geq v\geq V_\mu(\eta)$. Im folgenden benutzen wir häufig den

Satz. *Wenn ξ und η gute Strategien sind, so folgt aus $\xi_\nu\neq 0$ die Gleichung $V_\nu(\eta)=v$ und aus $\eta_\mu\neq 0$ die Gleichung $U_\mu(\xi)=v$.*

Beweise hierfür findet man bei MCKINSEY [9] Theorem 2.12, S. 41; BLACKWELL-GIRSHICK [1] Theorem 2.7.1, S. 60 und bei v. NEUMANN-MORGENSTERN [11] 17:D, S. 161.

Definition. *Ein Duell heißt symmetrisch, wenn $f=g$ und $p=1$ ist.*

Wir behandeln zuerst das symmetrische α-Duell. Der Punkt

$$a=\sup\{x\,|\,f(x)=0\}$$

soll zu jeder Teilung $\mathfrak{T}_n$ gehören. Nach § 4 Satz 15 gilt dann $\xi_\nu=0$ für $x_\nu<a$. Sei nun $\xi_\nu\neq 0$ und $x_\nu>a$. Da das Duell symmetrisch ist, so gibt es auch eine gute Strategie für den zweiten Spieler mit $\eta_\nu\neq 0$. Dann ist aber $U_\nu(\xi)=v\leq U_{\nu-1}(\xi)$. Die Ungleichung $U_\nu(\xi)\leq U_{\nu-1}(\xi)$ lautet ausführlich:

$$C-f_\nu\Big\{1+C-2\sum_{0}^{\nu-1}f_\mu\xi_\mu\Big\}+f_\nu^2\xi_\nu\leq C-f_{\nu-1}\Big\{1+C-2\sum_{0}^{\nu-1}f_\mu\xi_\mu\Big\}-f_{\nu-1}^2\xi_{\nu-1}$$

oder

$$f_\nu^2\xi_\nu+f_{\nu-1}^2\xi_{\nu-1}\leq(f_\nu-f_{\nu-1})\Big\{1+C-2\sum_{0}^{\nu-1}f_\mu\xi_\mu\Big\}\leq 2(f_\nu-f_{\nu-1}).$$

Daraus folgt dann wegen $f_\nu^2\geq\alpha_1\alpha_2=\alpha>0$ die Ungleichung

$$\xi_\nu\leq\frac{2}{\alpha}(f_\nu-f_{\nu-1}) \quad \text{für} \quad x_\nu\neq a. \tag{1}$$

Wir können nun zeigen, daß $\{F_n\}$ gleichgradig T-stetig ist. Gegeben sei ein $\delta>0$. Man wähle N so, daß $\frac{2}{\alpha\cdot N}\leq\delta$ ist. Die Teilung $\mathfrak{T}_N$, d.h. die Teilung

$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_\nu = 1$ mit $f(x_k - 0) - f(x_{k-1}) < 1/N$, ist eine δ-Teilung für alle F_n mit $n \geqq N$. Dies folgt so: Für $n \geqq N$ sind die Punkte von $\mathfrak{T}_N$ unter den Stützstellen von F_n enthalten. Es gilt daher für $x_k < x' < x'' < x_{k+1}$ auf Grund von (1) die Abschätzung:

$$|F_n(x'') - F_n(x')| \leqq \sum_{x' < x_\nu \leqq x''} \xi_\nu \leqq \sum_{x_k < x_\nu < x_{k+1}} \xi_\nu \leqq \frac{2}{\alpha} \{f(x_{k+1} - 0) - f(x_k)\} < \frac{2}{\alpha \cdot N} \leqq \delta.$$

Nehmen wir nun zu der Teilung $\mathfrak{T}_N$ noch die endlichvielen Punkte hinzu, welche nötig sind, um eine δ-Teilung für die endlichvielen F_n mit $n < N$ zu erhalten, so haben wir eine δ-Teilung für $\{F_n\}$ konstruiert. Damit ist gezeigt: Für das symmetrische α-Duell ist $\{F_n\}$ gleichgradig T-stetig.

Als nächstes betrachten wir ein α-Duell, welchen aus einem monotonen Duell mit stetigem $g(y)$ und $p \neq 0$ hergeleitet worden ist. f und g seien die Treffwahrscheinlichkeiten im α-Duell. Wir setzen $a = \sup \{x | f(x)\, g(x) = 0\}$. Auf Grund von Satz 13 in § 3 auf S. 296 dürfen wir dann für jede ε-gute Strategie F_ε voraussetzen, daß $\int_0^a dF_\varepsilon = 0$ ist. Wir wollen die Strategien F_n so abändern, wie es in § 3 Satz 13 beschrieben wurde. Dann gilt $\xi_\nu = 0$ für $x_\nu < a$, während die ξ_ν mit $x_\nu > a$ nicht geändert worden sind. Der Punkt a soll zu jeder Teilung $\mathfrak{T}_n$ gerechnet werden. Wir gehen genau so vor, wie bei der Behandlung des symmetrischen Duells. Zunächst versuchen wir ξ_ν für $a < x_\nu < 1$ abzuschätzen. Sei $\xi_\nu \neq 0$ und $a < x_\nu < 1$, dann folgt: $f_\nu g_\nu \geqq \alpha_1 \alpha_2 = \alpha > 0$. Wir müssen nun 3 Fälle unterscheiden:

1. Fall. $f_{\nu+1} > f_\nu$. Aus $\xi_\nu \neq 0$ folgt $V_\nu(\eta) = v \geqq V_{\nu+1}(\eta)$. Die Ungleichung $V_\nu(\eta) \geqq V_{\nu+1}(\eta)$ lautet ausführlich:

$$-pD + f_\nu \Big\{1 + pD - (1+p) \sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu\Big\} + f_\nu g_\nu \eta_\nu$$

$$\geqq -pD + f_{\nu+1} \Big\{1 + pD - (1+p) \sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu\Big\} - p f_{\nu+1} g_{\nu+1} \eta_{\nu+1},$$

oder

$$f_\nu g_\nu \eta_\nu + p f_{\nu+1} g_{\nu+1} \eta_{\nu+1} \geqq (f_{\nu+1} - f_\nu) \Big(1 + pD - (1+p) \sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu\Big).$$

Wir möchten hieraus schließen, daß $\eta_\nu \neq 0$ oder $\eta_{\nu+1} \neq 0$ ist. Wenn $\eta_\nu \neq 0$ ist, so brauchen wir nichts zu beweisen. Wenn $\eta_\nu = 0$ ist, so müssen wir zeigen, daß $\eta_{\nu+1} \neq 0$ ist. Dies ist erreicht, wenn wir zeigen können, daß

$$A_\nu = 1 + pD - (1+p) \sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu > 0$$

ist, denn $f_{\nu+1} - f_\nu > 0$ war vorausgesetzt worden. Den Beweis führen wir, indem wir aus folgenden drei Gleichungen einen Widerspruch herleiten:

$$A_{\nu_0} = 0; \quad \eta_{\nu_0} = 0 \quad \text{und} \quad \xi_{\nu_0} \neq 0.$$

Da $g_\nu \leqq 1$ ist, so folgt aus $A_{\nu_0} = 0$ die Gleichung $1 = D = \sum_0^{\nu_0} g_\mu \eta_\mu$. Es dürfen also nur den ν mit $g_\nu = 1$ Werte η_ν mit $\eta_\nu \neq 0$ entsprechen. Sei $g_{\nu_1} = 1$ und ν_1

minimal gewählt. Da g monoton wächst, so ist $g_\nu = 1$ für alle $\nu \geqq \nu_1$, also gilt $\eta_\nu = 0$ für alle $\nu > \nu_1$ (dies folgt aus Satz 15 in § 4). Damit gilt $\eta_{\nu_1} = 1$ und $\eta_\nu = 0$ für $\nu \neq \nu_1$. Es folgt $\sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu = 0$ für $\nu < \nu_1$ und $\sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu = 1 = D$ für $\nu \geqq \nu_1$. Aus $A_{\nu_0} = 0$ und $\eta_{\nu_0} = 0$ ergibt sich, daß $\nu_0 > \nu_1$ ist. Auf Grund dieser Ergebnisse ist nun $V_\nu(\eta) = -p + f_\nu(1+p)$ für $\nu < \nu_1$, $V_{\nu_1}(\eta) = -p + f_{\nu_1}$ und $V_\nu(\eta) = -p$ für $\nu > \nu_1$. Wegen $\xi_{\nu_0} \neq 0$ gilt $V_{\nu_0}(\eta) = v = -p$, denn es ist $\nu_0 > \nu_1$. Die Ungleichung $-p = v \geqq V_{\nu_1}(\eta) = -p + f_{\nu_1}$ liefert dann $f_{\nu_1} = 0$, während $g_{\nu_1} = 1$ war. In dem gegebenen Duell auf dem Einheitsquadrat gibt es also ein x der Art, daß $f(x) = 0$ und $g(x) = 1$ ist. (Solche Spiele hatten wir schon auf S. 294 aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen.) In diesem Spiel ist jede beliebige Strategie eine gute (also auch eine ε-gute) Strategie für den ersten Spieler. Irgendeine konvergente Folge von Strategien erfüllt daher den Satz 18 auf S. 304. Wir dürfen daher solche Spiele aus unseren Betrachtungen ausschließen. Dann gilt:

(2) Aus $\xi_\nu \neq 0$ und $\eta_\nu = 0$ folgt $A_\nu \neq 0$.

Es ist also entweder $\eta_\nu \neq 0$ oder $\eta_{\nu+1} \neq 0$. Wenn $\eta_\nu \neq 0$ ist, so folgt $U_\nu(\xi) = v \leqq U_{\nu-1}(\xi)$, oder ausführlich:

$$C - g_\nu \left\{ p + C - (1+p) \sum_0^{\nu-1} f_\mu \xi_\mu \right\} + f_\nu g_\nu \xi_\nu$$

$$\leqq C - g_{\nu-1} \left\{ p + C - (1+p) \sum_0^{\nu-1} f_\mu \xi_\mu \right\} - p f_{\nu-1} g_{\nu-1} \xi_{\nu-1},$$

oder

$$f_\nu g_\nu \xi_\nu + p f_{\nu-1} g_{\nu-1} \xi_{\nu-1} \leqq (1+p)(g_\nu - g_{\nu-1}).$$

Berücksichtigen wir, daß $f_\nu g_\nu \geqq \alpha > 0$ ist, so folgt

(3) $$\xi_\nu \leqq \frac{1+p}{\alpha}(g_\nu - g_{\nu-1}).$$

Wenn $\eta_{\nu+1} \neq 0$ ist, so folgt $U_{\nu+1}(\xi) = v \leqq U_\nu(\xi)$, oder

$$C - g_{\nu+1} \left\{ p + C - (1+p) \sum_0^{\nu} f_\mu \xi_\mu \right\} + f_{\nu+1} g_{\nu+1} \xi_{\nu+1}$$

$$\leqq C - g_\nu \left\{ p + C - (1+p) \sum_0^{\nu} f_\mu \xi_\mu \right\} - p f_\nu g_\nu \xi_\nu,$$

also

$$p f_\nu g_\nu \xi_\nu + f_{\nu+1} g_{\nu+1} \xi_{\nu+1} \leqq (1+p)(g_{\nu+1} - g_\nu).$$

Also ist:

(4) $$\xi_\nu \leqq \frac{1+p}{p\alpha}(g_{\nu+1} - g_\nu).$$

Wir wollen (3) und (4) zusammenfassen zu

(5) $$\xi_\nu \leqq \frac{1+p}{\alpha}(g_\nu - g_{\nu-1}) + \frac{1+p}{p\alpha}(g_{\nu+1} - g_\nu).$$

Wir schätzen hier, wie überhaupt im weiteren Verlauf dieses Paragraphen, eher etwas zu reichlich ab, als daß wir uns auf zusätzliche Fallunterscheidungen einlassen.

Formel (5) gilt unter der Voraussetzung, daß $f_{\nu+1} > f_\nu$ ist.

2. Fall. $f_{\nu-1} < f_\nu = f_{\nu+1} = \cdots = f_{\nu+s-1} < f_{\nu+s}$. Wegen Satz 15 aus § 4 können wir annehmen, daß $\xi_{\nu+1} = \xi_{\nu+2} = \cdots = \xi_{\nu+s-1} = 0$ ist. Sei $\xi_\nu \neq 0$. Dann folgt:

$$V_\nu(\eta) = v \geqq V_{\nu+s}(\eta),$$

oder

$$-pD + f_\nu \Big\{1 + pD - (1+p) \sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu\Big\} + f_\nu g_\nu \eta_\nu$$

$$\geqq -pD + f_{\nu+s} \Big\{1 + pD - (1+p) \sum_0^\nu g_\mu \eta_\mu\Big\} - (1+p) f_{\nu+s} \sum_{\nu+1}^{\nu+s-1} g_\mu \eta_\mu -$$

$$- p f_{\nu+s} g_{\nu+s} \eta_{\nu+s}.$$

Also ist:

$$f_\nu g_\nu \eta_\nu + p f_{\nu+s} g_{\nu+s} \eta_{\nu+s} + (1+p) f_{\nu+s} \sum_{\nu+1}^{\nu+s-1} g_\mu \eta_\mu \geqq A_\nu (f_{\nu+s} - f_\nu).$$

Entweder ist $\eta_\nu \neq 0$ oder — auf Grund von (2) — wenigstens eines der $\eta_{\nu+l}$ mit $0 < l \leqq s$ ungleich Null. Ist $\eta_\nu \neq 0$, so folgt die Ungleichung $U_\nu(\xi) = v \leqq U_{\nu-1}(\xi)$, welche auf die Abschätzung $f_\nu g_\nu \xi_\nu \leqq (1+p)(g_\nu - g_{\nu+1})$ führt. Ist $\eta_{\nu+l} \neq 0$ und $l \neq s$, so folgt $U_{\nu+l}(\xi) = v \leqq U_\nu(\xi)$, d.h.

$$C - g_{\nu+l} \Big\{p + C - (1+p) \sum_0^\nu f_\mu \xi_\mu\Big\}$$

$$\leqq C - g_\nu \Big\{p + C - (1+p) \sum_0^\nu f_\mu \xi_\mu\Big\} - p f_\nu g_\nu \xi_\nu,$$

oder

$$p f_\nu g_\nu \xi_\nu \leqq (1+p)(g_{\nu+l} - g_\nu).$$

Ist $\eta_{\nu+s} \neq 0$ so ist $U_{\nu+s}(\xi) = v \leqq U_\nu(\xi)$ und eine entsprechende Rechnung liefert die Abschätzung

$$f_{\nu+s} g_{\nu+s} \xi_{\nu+s} + p f_\nu g_\nu \xi_\nu \leqq (1+p)(g_{\nu+s} - g_\nu).$$

Wir fassen diese Abschätzungen zusammen zu

$$\xi_\nu \leqq \frac{1+p}{\alpha}(g_\nu - g_{\nu-1}) + \frac{1+p}{p\alpha}(g_{\nu+s} - g_\nu). \tag{6}$$

Hierbei war $f_{\nu-1} < f_\nu = f_{\nu+1} = \cdots = f_{\nu+s-1} < f_{\nu+s}$ vorausgesetzt.

3. Fall. Es bleibt noch die Möglichkeit zu betrachten, daß $f_{\nu-1} < f_\nu = f_{\nu+1} = \cdots = f_r$ und $x_r = 1$ ist. Wir wollen nun nachträglich festsetzen:

$$x_0 = \min\{x \mid f(x) = f(1)\}$$

soll zu jeder Teilung $\mathfrak{T}_n$ gezählt werden. Wir werden für ξ_ν keine Abschätzung brauchen, wenn x_ν ein Teilpunkt für jede Teilung $\mathfrak{T}_n$ ist. Der Fall 3 erledigt sich dann durch diese nachträgliche Festsetzung.

Auf Grund der Formeln (5) und (6) können wir nun zeigen, daß $\{F_n\}$ gleichgradig T-stetig ist. Gegeben sei ein $\delta > 0$. Man wähle ein N so, daß

$$\frac{1+p}{\alpha N} + \frac{2(1+p)}{p\alpha N} \leqq \delta$$

ist. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{T}_N$ eine δ-Teilung für alle F_n mit $n \geqq N$ ist. Sei $x_k < x' \leqq x'' < x_{k+1}$ und $n \geqq N$. Dann folgt:

$$|F_n(x'') - F_n(x')| \leqq \sum_{x' < x_\nu \leqq x''} \xi_\nu \leqq \sum_{x_k < x_\nu < x_{k+1}} \xi_\nu \leqq \frac{1+p}{\alpha}\{g(x_{k+1}) - g(x_k)\} +$$

$$+ \frac{1+p}{p\alpha}\{g(x_{k+1}) - g(x_k)\} + \frac{1+p}{p\alpha} \cdot \frac{1}{N} < \frac{1+p}{\alpha N} + \frac{2(1+p)}{p\alpha N} \leqq \delta.$$

Diese Abschätzung wollen wir noch erläutern. Der Term $\frac{1+p}{\alpha}\{g(x_{k+1}) - g(x_k)\}$ entsteht aus den ersten Termen in den Formeln (5) und (6). Der Term $\frac{1+p}{p\alpha}\{g(x_{k+1}) - g(x_k)\}$ entspricht den zweiten Termen in den Formeln (5) und (6) genau dann, wenn kein Konstanz-Intervall $[a; b)$ von $f(x)$ existiert der Art, daß $x_k < a < x_{k+1}$ und $b \geqq x_{k+1}$ ist. Der Term $\frac{1+p}{p\alpha}\frac{1}{N}$ könnte dann fortfallen. Es bleibt also der Fall zu betrachten, daß solch ein Konstanz-Intervall existiert. Dabei kann nicht gelten, daß $b > x_{k+1}$ ist, denn dann müßte a ein Punkt der Teilung $\mathfrak{T}_N$ sein. [Wir hatten ja auf S. 299 festgesetzt: Wenn ein Punkt von $\mathfrak{T}$ in einem Konstanz-Intervall von $f(x)$ liegt, so soll auch der Anfangspunkt dieses Konstanz-Intervalles mit zur Teilung $\mathfrak{T}$ gehören.] Sei also $b = x_{k+1}$. Dann gilt

$$\sum_{x_k < x_\nu < x_{k+1}} \xi_\nu \leqq \frac{1+p}{\alpha}\{g(x_{k+1}) - g(x_k)\} + \frac{1+p}{p\alpha}\{g(x_{k+2}) - g(x_k)\}$$

$$< \frac{1+p}{\alpha}\{g(x_{k+1}) - g(x_k)\} + \frac{1+p}{p\alpha}\{g(x_{k+1}) - g(x_k)\} + \frac{1+p}{p\alpha}\frac{1}{N},$$

denn es war vorausgesetzt, daß $g(x_{k+2}) - g(x_{k+1}) < 1/N$ ist. Damit ist die Gültigkeit der Abschätzung $|F_n(x'') - F_n(x')| < \delta$ gezeigt; $\mathfrak{T}_N$ ist eine δ-Teilung für alle F_n mit $n \geqq N$.

Wir wollen nun zu $\mathfrak{T}_N$ alle diejenigen endlichvielen Punkte hinzunehmen, welche nötig sind, damit eine δ-Teilung für die endlichvielen F_n mit $n < N$ entsteht. Auf diese Weise kommen wir zu einer δ-Teilung für alle F_n. Die Folge $\{F_n\}$ ist also gleichgradig T-stetig.

Wir wollen die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammenfassen und erhalten:

Satz 17. *Bei einem symmetrischen α-Duell gibt es eine Folge ε-guter Strategien, welche gegen eine gute Strategie konvergiert.*

Satz 18. *Bei einem α-Duell, welches sich aus einem Duell mit stetigem $g(y)$ und $p \neq 0$ herleitet, gibt es eine Folge ε-guter Strategien des ersten Spielers, welche gegen eine gute Strategie des ersten Spielers konvergiert.*

§ 6. Abrundung und Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir wollen versuchen, die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf beliebige Duelle auszudehnen. Dazu beweisen wir den

Satz 19. *Gegeben sei ein Duell mit dem Kern*

$$K^*(x;y)=\varphi(x)-p\,\psi(y)\begin{cases}+p\,\varphi(x)\,\psi(y) & \text{für } x<y\\ +0 & \text{für } x=y\\ -\varphi(x)\,\psi(y) & \text{für } x>y,\end{cases}$$

wobei φ,ψ halbstetig nach oben, $0\leq\varphi,\psi\leq 1$ und $p\geq 0$ ist.

Sei $f(x)=\sup_{\xi\in[0,x]}\varphi(\xi)$, $g(y)=\sup_{\eta\in[0,x]}\psi(\eta)$ *und*

$$K(x;y)=f(x)-p\,g(y)\begin{cases}+p\,f(x)\,g(y) & \text{für } x<y\\ +0 & \text{für } x=y\\ -f(x)\,g(y) & \text{für } x>y.\end{cases}$$

Dann gilt: f und g sind monoton steigend, von rechts stetig und

$$\int K(x;y)\,dF(x)\leq\int K^*(x;y)\,dF(x)$$

und

$$\int K(x;y)\,dG(y)\geq\int K^*(x;y)\,dG(y)$$

für jede Strategie $F\in\mathfrak{C}_1$ und $G\in\mathfrak{C}_2$. Dabei sind die Klassen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ in bezug auf das Duell mit dem Kern $K(x;y)$ gebildet.

Der Beweis erfolgt in 3 Schritten.

Schritt 1. Wir zeigen, daß f monoton steigend und von rechts stetig ist.

$$f(x+h)=\sup_{[0,x+h]}\varphi(\xi)=\max\left\{\sup_{[0,x]}\varphi(\xi);\ \sup_{(x,x+h]}\varphi(\xi)\right\}$$

$$=\max\left\{f(x);\ \sup_{(x,x+h]}\varphi(\xi)\right\}\geq f(x).$$

Es ist also $f(x+h)\geq f(x)$.

$$f(x+0)=\lim_{h\to 0}f(x+h)=\lim_{h\to 0}\max\left\{f(x);\ \sup_{(x,x+h]}\varphi(\xi)\right\}$$

$$=\max\left\{f(x);\lim_{h\to 0}\sup_{(x,x+h]}\varphi(\xi)\right\}=f(x),$$

denn

$$\lim_{h\to 0}\sup_{(x,x+h]}\varphi(\xi)\leq\lim_{h\to 0}\sup_{[x-h;x+h]}\varphi(\xi)=\lim_{\xi\to x}\sup\varphi(\xi)=\varphi(x)\leq f(x).$$

Es gilt also $f(x+0)=f(x)$.

Schritt 2. Wir wollen zeigen: Wenn $\varphi(x)\neq f(x)$ ist, so gibt es ein $\alpha>0$ der Art, daß für alle δ mit $0<\delta<\alpha$ die Gleichung $f(x-\delta)=f(x+\delta)$ gilt.

Sei $f(x)=a\neq\varphi(x)$, also $\varphi(x)<a$. Da $\varphi(x)$ halbstetig nach oben ist, so gibt es ein $\alpha>0$ so, daß für alle ξ mit $|\xi-x|<\alpha$ die Ungleichung $\varphi(\xi)<a$ erfüllt ist. (Man vgl. hierzu: NATANSON [10] S. 410, Satz 3.) Nun können

wir wie folgt schließen. Wenn $0<\delta<\alpha$ und α wie oben gewählt wird, so gilt

$$f(x+\delta)=\max\left\{f(x);\ \sup_{(x,\,x+\delta]}\varphi(\xi)\right\}=f(x),$$

denn

$$\sup_{(x,\,x+\delta]}\varphi(\xi)\leqq\sup_{[x,\,x+\delta]}\varphi(\xi)=\max_{[x,\,x+\delta]}\varphi(\xi)<a=f(x).$$

Ferner ist:

$$f(x)=\max\left\{f(x-\delta);\ \sup_{(x-\delta,\,x]}\varphi(\xi)\right\}=f(x-\delta),$$

denn

$$\sup_{(x-\delta,\,x]}\varphi(\xi)\leqq\sup_{[x-\delta,\,x]}\varphi(\xi)=\max_{[x-\delta,\,x]}\varphi(\xi)<a=f(x).$$

Das heißt, die andere Möglichkeit, nämlich $f(x)=\sup_{(x-\delta,\,x]}\varphi(\xi)$, führt auf einen Widerspruch. Damit ist gezeigt: Für $0<\delta<\alpha$ gilt $f(x-\delta)=f(x)=f(x+\delta)$.

Schritt 3. Sei $F\in\mathfrak{C}_1$. Nach der Definition von $\mathfrak{C}_1$ (S. 292) gilt dann $\int\limits_{(a,\,b)}dF=0$, falls $f(x)=c$ für $x\in[a;b\rangle$ ist. Wegen Schritt 2 können wir schließen: $\int\limits_{(a,\,b)}dF=0$, wenn $f(x)\neq\varphi(x)$ für $x\in(a;b)$ gilt. Wir wollen jetzt die Ungleichung $\int K^*(x;y)\,dF(x)\geqq\int K(x;y)\,dF(x)$ beweisen.

$$\begin{aligned}\int K^*(x;y)\,dF(x)-\int K(x;y)\,dF(x)&=\int\varphi\,dF-\psi(y)\,\{p+\int\varphi\,dF-(1+p)\,\psi(y)\times\\&\times\int^{y}\varphi\,dF\}+\varphi(y)\,\psi(y)\,\sigma_F(y)-\int f\,dF+g(y)\,\{p+\int f\,dF-(1+p)\,g(y)\times\\&\times\int^{y}f\,dF\}-f(y)\,g(y)\,\sigma_F(y)=\int(\varphi-f)\,dF+\\&+\{g(y)-\psi(y)\}\cdot\{p+\int f\,dF-(1+p)\cdot\int^{y}f\,dF-f(y)\,\sigma_F(y)\}+\\&+\psi(y)\,\{\int(f-\varphi)\,dF-(1+p)\cdot\int^{y}(f-\varphi)\,dF-(f(y)-\varphi(y))\,\sigma_F(y)\}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist größer oder gleich Null, denn es ist:

$$g(y)-\psi(y)\geqq0$$

und

$$\begin{aligned}p+\int f\,dF-(1+p)\cdot\int^{y}f\,dF-f(y)\,\sigma_F(y)&\geqq(1+p)\,\{\int f\,dF-\\&-\int^{y}f\,dF-f(y)\,\sigma_F(y)\}\geqq0.\end{aligned}$$

Schließlich gilt $\int^{y}(f-\varphi)\,dF=0$ und $\{f(y)-\varphi(y)\}\,\sigma_F(y)=0$, denn entweder ist $f(y)=\varphi(y)$, oder y befindet sich im Inneren eines Intervalles vom F-Maß Null. Es ist also:

$$\int K(x;y)\,dF(x)\leqq\int K^*(x;y)\,dF(x).$$

Genau so folgt:

$$\int K(x;y)\,dG(y)\geqq\int K^*(x;y)\,dG(y).$$

Damit ist Satz 19 bewiesen.

Satz 19 sagt aus: Wenn ein beliebiges Duell gegeben ist, so läßt sich stets ein Duell mit monoton steigenden, von rechts stetigen Treffwahrscheinlich-

keiten angeben, so daß jede für das monotone Duell gute oder ε-gute Strategie (aus den Klassen $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$) auch gut oder ε-gut für das gegebene Duell ist. Aussagen über monotone Duelle lassen sich also auf allgemeine Duelle übertragen. Dann folgt aus Satz 14 in § 4, S. 299

Satz 20. *Jedes Duell hat einen Wert.*

Wir betrachten jetzt Duelle mit monotonen Treffwahrscheinlichkeiten und mit $p \neq 0$. Der Satz 11 aus § 3 (S. 295) sagt aus, daß wir uns bei der Betrachtung von guten oder ε-guten Strategien eines monotonen Duells mit $p \neq 0$ auf die Klasse der α-Duelle beschränken können, denn bei den guten und ε-guten Strategien dürfen wir nach § 3 stets annehmen, daß sie zu den Klassen $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ gehören. Da auch die speziellen ε-guten Strategien des ersten Spielers, welche wir in § 5 betrachtet haben, zur Klasse $\mathfrak{C}_1$ gehörten, so übertragen sich die Ergebnisse des § 5 auf alle Duelle mit $p \neq 0$ und monotonen Treffwahrscheinlichkeiten, und damit nach dem Satz 19 dieses Paragraphen auf alle Duelle mit $p \neq 0$. Wir haben damit folgendes Ergebnis erhalten:

Satz 21. *Bei symmetrischen Duellen hat jeder Spieler eine gute Strategie. Bei Duellen mit $p \neq 0$ und stetigem g hat der erste Spieler eine gute Strategie. Bei beiden Duelltypen gibt es eine Folge ε-guter Strategien, welche gegen eine gute Strategie konvergiert.*

Anmerkung. Natürlich gilt genau so: Bei Duellen mit $p \neq 0$ und stetigem f hat der zweite Spieler eine gute Strategie.

Die Existenz der guten Strategien des ersten Spielers konnte nicht bewiesen werden ohne die Voraussetzung, daß g stetig sei. Ein solcher Beweis ist auch ohne Zusatzvoraussetzungen nicht möglich. Wir können nämlich leicht ein Duell mit unstetigem g angeben, welches keine guten Strategien für den ersten Spieler besitzt. Wir geben ein Beispiel: Sei

$$f(x) = x \quad \text{und} \quad g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } y < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

und $p = 1$. Wählt der zweite Spieler die Strategie $G(y) = \frac{4}{5} I_0(y) + \frac{1}{5} I_{\frac{1}{2}}(y)$, so ist

$$V(x; G(y)) = \begin{cases} -\frac{3}{5} + (\frac{4}{5}) \cdot x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & \text{für } x = \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{5} + (\frac{2}{5}) \cdot x & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Man hat also: $V(x; G(y)) \leq -\frac{1}{5}$. Wählt der erste Spieler die Strategie $F_\varepsilon(x) = \frac{4}{5} I_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(x) + \frac{1}{5} I_1(x)$, so ist

$$U(F_\varepsilon(x), y) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + (\frac{2}{5})\,\varepsilon & \text{für } 0 \leq y < \frac{1}{2} - \varepsilon \\ -(\frac{4}{5})\,\varepsilon & \text{für } y = \frac{1}{2} - \varepsilon \\ -\frac{1}{5} - (\frac{6}{5})\,\varepsilon & \text{für } \frac{1}{2} - \varepsilon < y < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} - (\frac{8}{5})\,\varepsilon & \text{für } \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ -(\frac{8}{5})\,\varepsilon & \text{für } y = 1. \end{cases}$$

Man hat also: $U(F_\varepsilon(x); y) \geq -\frac{1}{5} - (\frac{8}{5})\,\varepsilon$.

Daraus entnehmen wir: Der Wert des Spieles ist $v = -\frac{1}{5}$, $G(y)$ ist eine gute Strategie für den zweiten Spieler, und $F_\varepsilon(x)$ ist eine ε-gute Strategie für den ersten Spieler.

Wir können nun notwendige Bedingungen für eine gute Strategie des ersten Spielers aufstellen. Eine gute Strategie $F(x)$ darf nur diejenigen Punkte des Intervalles $[0;1]$ mit Gewicht belegen, an welchen $V(x; G(y)) = v$ ist, also nur den Punkt $x = 1$. Als gute Strategie für den ersten Spieler käme daher nur $F(x) = I_1(x)$ in Frage, wir rechnen aber leicht nach, daß

$$U(I_1(x); \tfrac{1}{2}) = -1 < -\tfrac{1}{5} = v$$

ist. Es gibt also keine gute Strategie für den ersten Spieler.

Wir können das Beispiel abändern, indem wir setzen:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } x \leq \alpha \\ x & \text{für } x \geq \alpha. \end{cases}$$

Solange $\alpha < \frac{1}{2}$ ist, hat auch jetzt der erste Spieler keine gute Strategie. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ dagegen gibt es eine gute Strategie für den ersten Spieler. Ein Kriterium dafür, wann bei einem Duell mit unstetigem g der erste Spieler eine gute Strategie besitzt, ist noch nicht bekannt.

Literatur

[1] BLACKWELL-GIRSHICK: Theorie of games and statistical decisions. New York 1954. — [2] BURGER, E.: Spieltheoretische Behandlung eines Reklameproblems. Mitteilungsblatt math. Statistik **6**, 39—52 (1954). — [3] CRAMÉR, H.: Mathematical methods of statistics. Princeton 1946. — [4] DANSKIN-GILLMAN: A game over function-space. Riv. di mat. Univ. Parma **4**, 83—94 (1953). — [5] FRÉCHET, M.: Recherches théoriques modernes, premier livre. (Tome I, Fasc. II von BOREL: Traité du calcul des probabilités.) Paris 1937. — [6] GILLMAN, L.: Operations analysis and the theory of games: An advertising exemple. J. Amer. Statist. Assoc. **45**, 514—545 (1950). — [7] GNEDENKO-KOLMOGOROV: Limit distributions for sums of independent random variables. Cambridge Mass. 1954. — [8] KARLIN, S.: Reduction of certain classes of games to integral equations. Contributions to the theory of games II. Ann. of Math. Stud. **28**, 125—158 (1953). — [9] MCKINSEY, J. C. C.: Introduction to the theory of games. New York 1952. — [10] NATANSON, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1954. — [11] NEUMANN-MORGENSTERN, v.: Theory of games and economic behavior, 2. Aufl. Princeton 1947. — [12] SHIFFMAN, M.: Games of timing. Contributions to the theory of games II. Ann. of Math. Stud. **28**, 97—124 (1953).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. November 1955)

Dolph, C. L., and R. K. Ritt
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 309—326 (1956)

The Schwinger variational principles for one-dimensional quantum scattering

Dedicated to the Memory of Hermann Weyl

By

C. L. Dolph and R. K. Ritt

§ 1. Introduction

The success of variational methods in the solution of scattering problems [9] has aroused an interest in the rigorous formulation and deeper understanding of these methods [1], [4], [6]. In this paper, we examine the variational principle for the one-dimensional quantum scattering of a plane wave with positive energy, k^2, by a positive potential, $V(x)$, for which $\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\,dx < \infty$. We find:

1. If $\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\,dx < 2k$, the Schwinger variational principle is valid; i.e., the behavior of the transmitted wave for a large x can be determined by the stationary value of an appropriate bilinear integral form, subject to a normalizing constraint. If $\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\,dx \geqq 2k$ an additional hypothesis must be imposed before the validity of the principle can be established; namely, the potential must not be "perfectly transparent" to the plane wave. To the best of our knowledge, this condition does not appear explicitly in the literature, although it is tacitly present in all the discussions of the principle. We call attention to an elementary example to show that a perfectly transparent potential can occur.

2. It is known [7] that in the one-dimensional case both the transmission and reflection coefficients can be characterized *formally* as stationary points of a variational principle. In the case of the reflection coefficient, the variational principle is symmetric with respect to a real inner product or, since it is convenient to use the theory of complex Hilbert space, quadratic with respect to a Hermitian inner product. In the case of the transmission coefficient, the variational principle is bilinear with respect to either inner product. However, as we will demonstrate, it can be reformulated as a quadratic variational principle in a suitably defined product Hilbert space. This reformulation not only makes a geometrical interpretation possible but in addition it results in unifying the theory since, when it is considered abstractly, it includes the variational principle for the reflection amplitude as a special case.

It should be noticed that our formulation differs from the usual one, in which the competing functions do not lie in a Hilbert space since they do not vanish at infinity. However, by multiplying the integral equation by $U(x) = [V(x)]^{\frac{1}{2}}$ if $V(x) \geqq 0$, and by $U_1(x) = [|iV(x)|]^{\frac{1}{2}}$ if $V(x) \leqq 0$, this formulation can be restated in terms of a Hilbert space. The first of these devices has been used by Kato [5]. Throughout this paper we will assume $V(x) \geqq 0$ and work with $U(x)$. It is a simple matter for the reader to verify that the results and method of proof are similar under the alternate hypothesis.

3. In the case of the transmission coefficient, the stationary points form a one (complex) parameter curve on the constraining surface. These points can be divided into two classes, according to the behavior of the imaginary part of the quadratic form. At points of the first class, the imaginary part exhibits a local saddle point behavior; i.e., we express this imaginary part as a real quadratic form on the direct sum of the two real Hilbert spaces, and show that its projections onto these two spaces have, respectively, a local minimum and a local maximum. At points of the second class, one of these two projections has a global maximum and nothing can be said about the other.

In the case of the reflection coefficient, the situation is much simpler geometrically. There is only one class of possible stationary points and it forms a one-dimensional linear manifold. Here the projections of the imaginary part of the corresponding real quadratic form on the direct sum of the two corresponding real Hilbert spaces always leads to a global minimum and a global maximum so that there is always a global saddle point behavior. On the other hand, in this case we obtain less information concerning the reflection coefficient itself, since there appears to be no useful analog of the cross-section theorem from which to deduce its properties.

4. For the sake of clarity and at the expense of some unity in the treatment we first discuss the more difficult case of the transmission coefficient, reserving the treatment of the reflection coefficient for the last section of the paper. The outline of the paper is as follows: § 2 is devoted to a discussion of the pertinent properties of the associated Fredholm integral equations which underlie our entire theory; § 3 is devoted to a discussion to the relation of these equations with the scattering problem and to an example of a "transparent" potential; § 4 discusses the bilinear variational principle for the transmission coefficient in Hilbert space; § 5 discusses the quadratic formulation of the same principle in a product Hilbert space; § 6 is devoted to the characterization of the stationary points for the transmission coefficient; and § 7 is given over to the corresponding formulation and discussion appropriate for the reflection coefficient.

The notation will, for the most part, be self-explanatory. The symbol (*, *) will always be used to denote the inner product, regardless of the space with which we are dealing; the objects which appear in place of the asterisks will identify the space. We freely use the δ of the calculus of variations;

this is equivalent to using Gateaux differentials [3]. When we say that a function is stationary we mean that its Gateaux differential is zero. The reader may be troubled by the extensive use of conjugations: in some cases the ordinary conjugation in a complex function space; in others a more abstract conjugation [8]. This could be avoided by using a symmetric, rather than a Hermitian symmetric, inner product, but this would involve a re-orientation for the reader familiar with Hilbert spaces; we have chosen what appears to be the lesser of two evils.

The argument does not depend upon the existence of a biorthogonal expansion. It can be proved, using methods of Dunford, Schwartz, Werner, and Bade [2], that the basic integral operator does have a biorthogonal spectral resolution. Thus, there is a possibility that the problem could be formulated analogously to the Rayleigh-Ritz procedure [1].

§ 2. The Fredholm equations

We shall consider the operator on $L^{(2)}(-\infty, \infty)$ defined by

$$K\varphi = \frac{1}{2ki} \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, e^{ik|x-y|}\, U(y)\, \varphi(y)\, dy \tag{2.1}$$

where $U(x)$ is a real valued function in $L^{(2)}(-\infty, \infty)$.

LEMMA 1. *K is a bounded linear operator. The operator norm of K, $|||K|||$, satisfies*

$$\|K\| \leq \frac{1}{2k} \|U(x)\|^2. \tag{2.2}$$

K is compact. The adjoint of K, K^* satisfies

$$K^*\varphi = \overline{K\bar{\varphi}}. \tag{2.3}$$

If φ_0 is defined by

$$\varphi_0(x) = U(x)\, e^{ikx}, \tag{2.4}$$

then

$$(K\varphi, \psi) - (\varphi, K\psi) = \frac{1}{2ki} \{(\varphi, \varphi_0)(\varphi_0, \psi) + (\varphi, \bar{\varphi}_0)(\bar{\varphi}_0, \psi)\}, \tag{2.5}$$

for all φ and ψ in $L^{(2)}(-\infty, \infty)$.

PROOF. (2.2) is obtained from Schwartz's inequality. K is generated by a Hilbert-Schmidt kernel and is therefore compact. (2.3) is obtained from inspection. To prove (2.5) we integrate by parts as follows:

$$\begin{aligned}(K\varphi, \psi) &= \frac{1}{2ki} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)} \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, e^{ik|x-y|} U(y)\, \varphi(y)\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{2ki} \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, \overline{\psi(x)} \left\{ e^{ikx} \int_{-\infty}^{x} e^{-iky}\, U(y)\, \varphi(y)\, dy + \right. \\ &\quad \left. + e^{-ikx} \int_{x}^{\infty} e^{iky}\, U(y)\, \varphi(y)\, dy \right\} dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2ki}\left[\int_{-\infty}^{x} U(y)\,\overline{\psi(y)}\,e^{iky}\,dy \int_{-\infty}^{x} e^{-iky}\,U(y)\,\varphi(y)\,dy\right]_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \frac{1}{2ki}\left[\int_{x}^{\infty} U(y)\,\overline{\psi(y)}\,e^{-iky}\,dy \int_{x}^{\infty} e^{iky}\,U(y)\,\varphi(y)\,dy\right]_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \frac{1}{2ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} U(y)\,\overline{\psi(y)}\,e^{iky}\,dy\right)e^{-ikx}\,U(x)\,\varphi(x)\,dx -$$

$$- \frac{1}{2ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x}^{\infty} U(y)\,\overline{\psi(y)}\,e^{-iky}\,dy\right)e^{ikx}\,U(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2ki}\{(\varphi,\varphi_0)\,(\varphi_0,\psi) + (\varphi,\varphi_0)\,(\varphi_0,\psi)\} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\left(\overline{\frac{1}{2ki}\int_{-\infty}^{\infty} U(x)\,e^{-ik|x-y|}\,U(y)\,\psi(y)\,dy}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2ki}\{(\varphi,\varphi_0)\,(\varphi_0,\psi) + (\varphi,\overline{\varphi}_0)\,(\overline{\varphi}_0,\psi)\} + (\varphi, K\psi).$$

LEMMA 2. *The imaginary part of every eigenvalue of K is non-positive, and the eigenfunction φ corresponds to a real eigenvalue if and only if $(\varphi,\varphi_0) = (\varphi,\overline{\varphi}_0) = 0$.*

PROOF. If $K\varphi = \lambda\varphi$, then from (2.5),

$$(\lambda - \bar{\lambda})\,\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2ki}\{|(\varphi,\varphi_0)|^2 + |(\varphi,\overline{\varphi}_0)|^2\}.$$

Now, we define the operators

$$F = \frac{K - K^*}{2i}, \qquad G = \frac{K + K^*}{2}. \tag{2.6}$$

LEMMA 3. *F and G are bounded, self-adjoint, compact linear operators. $K = G + iF$. F is negative semi-definite. The range of F is the two dimensional space, H_0, spanned by φ_0 and $\overline{\varphi}_0$.*

PROOF. The first two statements are trivial. Using (2.5) and (2.6) we have

$$F\varphi = -\frac{1}{4k}\{(\varphi,\varphi_0)\,\varphi_0 + (\varphi,\overline{\varphi}_0)\,\overline{\varphi}_0\}, \tag{2.7}$$

which proves the lemma.

Now, suppose $K\varphi = \varphi$. Then, from lemma 2 and (2.7), $F\varphi = 0$. Therefore, $G\varphi = K\varphi = \varphi$. Conversely, if $G\varphi = \varphi$ and $F\varphi = 0$, $K\varphi = \varphi$.

LEMMA 4. *Let H_1 be the intersection of the null space of $I - G$ (I = identity) and $H_0^{\perp}$. Then H_1 is the null space of $A = I - K$, and $H = H_1^{\perp}$ remains invariant under K. H_1 is also the null space for $A^* = I - K^*$, and H remains invariant under K^*.*

PROOF. The paragraph which precedes the lemma shows that $A\varphi = 0$ if and only if $F\varphi = 0$ and $G\varphi = \varphi$; this is equivalent to $F^*\varphi = 0$ and $G^*\varphi = \varphi$;

thus, H_1 is also the null space for A^*. Let ψ be in H. Then $(\psi, \varphi) = 0$ for all φ in H_1. But $(K\psi, \varphi) = (\psi, K^*\varphi) = (\psi, G^*\varphi) = 0$, for all φ in H_1. Therefore $K\psi$ is in H. Similarly, $K^*\psi$ is in H. This completes the proof.

THEOREM 1. *The operators $A = I - K$, $A^* = I - K^*$, when regarded as operators on H both have bounded inverses. In particular, the Fredholm equations*

$$A\varphi = \varphi_0; \quad A^*\overline{\psi} = \varphi_0, \tag{2.8}$$

have unique solutions in H.

PROOF. This follows directly from lemma 4. It should be observed that if the inhomogeneous terms in (2.8) are replaced by any functions in H, the theorem continues to be true. We use $\overline{\psi}$ rather than ψ in (2.8) for later convenience.

THEOREM 2. *If φ_1 and $\overline{\psi}_1$ are the solutions of* (2.8) *then*

$$(\varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_0, \overline{\psi}_1) \quad \textit{(Reciprocity)}. \tag{2.9}$$

If $\|U(x)\|^2 < 2k$, then $(\varphi_1, \varphi_0) \neq 0$.

PROOF. $(\varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_1, A^*\overline{\psi}_1) = (A\varphi_1, \overline{\psi}_1) = (\varphi_0, \overline{\psi}_1)$; if $A\varphi_1 = \varphi_1 - K\varphi_1 = \varphi_0$, and $(\varphi_1, \varphi_0) = 0$, then $\|\varphi_1\|^2 = (K\varphi_1, \varphi_1) \leq \|K\|\,\|\varphi_1\|^2$. Therefore $\|K\| \geq 1$. But if $\|U(x)\|^2 < 2k$, this contradicts (2.2). The theorem is proved.

In what follows, regardless of the value of $\|U(x)\|$, we shall assume that φ_1 satisfies

$$(\varphi_1, \varphi_0) \neq 0. \tag{2.10}$$

As we shall see in § 3 this is equivalent to assuming that the potential is not perfectly transparent. Restricting ourselves to H rather than studying the equations (2.8) on all of $L^{(2)}(-\infty, \infty)$ is not essential, as we shall see in Theorem 4 below. We do so as a matter of elegance, since otherwise we would have to keep in mind the finite dimensional (G is compact) subspace, H_1, and phrase our statements accordingly.

§ 3. Discussion of the preceding formulations

We shall now connect the Fredholm equations (2.8) with the problem of one-dimensional quantum scattering. The fundamental analytic object one has to deal with is the time independent Schrödinger equation

$$\omega'' + [k^2 - V(x)]\,\omega = 0, \tag{3.1}$$

subject to the conditions

$$\lim_{x \to \infty} [\omega' - ik\omega] = 0, \tag{3.2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} [\omega' + ik\omega]\, e^{-ikx} = 2ik. \tag{3.3}$$

Solving this problem is equivalent to solving the integral equation

$$\omega(x) = e^{ikx} + \frac{1}{2ki}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-y|}\, V(y)\,\omega(y)\,dy. \tag{3.4}$$

If we assume that $\int_{-\infty}^{\infty} |V(y)|\,dy < \infty$, this is a Fredholm equation of the second kind in the space of essentially bounded functions. Now, if $V(y) \geqq 0$, we avoid the difficulty of dealing with a space which is not self-dual, by setting $U(x) = [V(x)]^{\frac{1}{2}}$, $\varphi(x) = U(x)\,\omega(x)$, $\varphi_0(x) = U(x)\,e^{ikx}$, and multiplying (3.4) by $U(x)$. This gives the first equation in (2.8). It is clear that the solution, φ_1, of (2.8) determines the solution of (3.4), except on the set for which $U(x) = 0$. On this set $\omega(x)$ can be determined from (3.1) and the usual requirements of continuity of $\omega(x)$ and $\omega'(x)$.

The critical quantity we wish eventually to determine is

$$\frac{1}{\lambda_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\, V(x)\, e^{-ikx}\,dx, \tag{3.5}$$

where $\omega(x)$ is the solution of (3.4). $1 + \frac{1}{2ki\lambda_1}$ is the complex amplitude of the transmitted radiation. But $\frac{1}{\lambda_1}$ is exactly the same as (φ_1, φ_0). Thus we lose nothing by dealing with (2.8) rather than (3.4).

Now what is the structure of the space H_1? To understand this we shall interpret H_1 from the point of view of equation (3.1). Suppose that $\varphi(x)$ simultaneously satisfies

$$\varphi = K\varphi, \tag{3.6}$$

$$(\varphi, \varphi_0) = (\varphi, \bar{\varphi}_0) = 0. \tag{3.7}$$

Then the corresponding $\omega(x)$ satisfies

$$\omega(x) = \frac{1}{2ki}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-y|}\, V(y)\,\omega(y)\,dy, \tag{3.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\, V(x)\, e^{ikx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\, V(x)\, e^{-ikx}\,dx = 0. \tag{3.9}$$

But then we can write

$$\omega(x) = \frac{1}{2ki}\left\{e^{ikx}\int_{-\infty}^{x} e^{-iky}\, V(y)\,\omega(y)\,dy + e^{-ikx}\int_{-x}^{\infty} e^{iky}\, V(y)\,\omega(y)\,dy\right\}, \tag{3.10}$$

$$\omega'(x) = \tfrac{1}{2}\left\{e^{ikx}\int_{-\infty}^{x} e^{-iky}\, V(y)\,\omega(y)\,dy - e^{-ikx}\int_{-x}^{\infty} e^{iky}\, V(y)\,\omega(y)\,dy\right\}, \tag{3.11}$$

$$\omega'' + [k^2 - V(x)]\,\omega = 0. \tag{3.12}$$

Combining (3.10) and (3.11), and using (3.9) we secure the following conditions which must be satisfied by $\omega(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}[ik\omega+\omega']=0; \qquad \lim_{x\to\infty}[ik\omega-\omega']=0, \tag{3.13}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[ik\omega+\omega']=0; \qquad \lim_{x\to-\infty}[ik\omega-\omega']=0. \tag{3.14}$$

From (3.13) and (3.14) it is apparent that $\omega(x)$ and $\omega'(x)$ must approach zero as x approaches both $+\infty$ and $-\infty$. The $\omega(x)$ then correspond to certain *bound states* of the system; i.e., solutions of the Schrödinger equation which together with their derivatives vanish at $+\infty$ and $-\infty$. In limiting ourselves to H we exclude from consideration those $\varphi(x)$ which correspond to these bound states. It is only when we do this that we guarantee the uniqueness of the solution of (2.8). There may well exist other bound states. These will correspond to those eigenfunctions of K which have real eigenvalues. This is easily verified by making use of lemma 2 and repeating the above argument. It serves no useful purpose to exclude these other bound states.

The condition (2.10) is, as we shall see, forced upon us if we wish to find (3.5) using a variational principle. In theorem 2 we proved that if the potential is "sufficiently weak", i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\,dx < 2k, \tag{3.15}$$

then (2.10) is automatically satisfied. But what can be said if (3.15) fails to hold? Let us suppose that $(\varphi_1, \varphi_0)=0$. Since $\varphi_1=\varphi_0+K\varphi_1$, $(K\varphi_1, \varphi_1)=(\varphi_1, \varphi_1)=(\varphi_1, K\varphi_1)$. Consequently, using (2.5), $(\varphi_1, \bar{\varphi}_0)=0$. Then the corresponding $\omega(x)$, which is a solution of (3.4), satisfies the conditions (3.9). As in the discussion which led to (3.13) and (3.14), we obtain

$$\lim_{x\to\infty}[ik\omega+\omega']e^{-ikx}=\lim_{x\to-\infty}[ik\omega+\omega']e^{-ikx}=2ik, \tag{3.16}$$

$$\lim_{x\to\infty}[ik\omega-\omega']=\lim_{x\to-\infty}[ik\omega-\omega']=0. \tag{3.17}$$

Therefore, we have

$$\lim_{x\to\infty}\omega e^{-ikx}=\lim_{x\to-\infty}\omega e^{-ikx}=1. \tag{3.18}$$

It is (3.18) which supplies a precise meaning to the assertion that $V(x)$ is "perfectly transparent" to the incoming plane wave e^{ikx}. For large positive values of x, no scattering will be detected, and for large negative values of x, no reflection will be detected. That this can happen, even in a simple type of situation, can be seen by letting $k=4\pi$, and defining

$$V(x)=\begin{cases}12\pi^2 & 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

then the function

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} e^{2\pi i x} - \frac{1}{2} e^{-2\pi i x} & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{4\pi i x} & \text{otherwise} \end{cases}$$

is the solution of (3.4). In this case, the variational principle will not apply, as will become apparent in § 4. It is an open question to find the general conditions on $V(x)$ which will guarantee (2.10). Trivially, (2.10) fails to be satisfied if and only if $(A^{-1}\varphi_0, \varphi_0) = 0$, but it is not obvious how to extract from this a sharp criterion. For a square wave potential, the question is easy to settle, but we shall not trouble the reader with the details.

§ 4. The variational principle for the transmission coefficient

We shall consider the variational technique of finding (φ_1, φ_0). Consider the bilinear form

$$J = (A\varphi, \overline{\psi}). \tag{4.1}$$

Let us attempt to make J stationary, subject to the normalizing constraint

$$(\varphi, \varphi_0)(\varphi_0, \overline{\psi}) = 1. \tag{4.2}$$

To do this, we introduce the Lagrange multiplier, λ, and set

$$J_\lambda = J - \lambda(\varphi, \varphi_0)(\varphi_0, \overline{\psi}). \tag{4.3}$$

Then the first variation of J_λ is given by

$$\begin{cases} \delta J_\lambda = (\delta\varphi, A^*\overline{\psi}) + (A\varphi, \delta\overline{\psi}) - \lambda(\delta\varphi, \varphi_0)(\varphi_0, \overline{\psi}) - \lambda(\varphi, \varphi_0)(\varphi_0, \delta\overline{\psi}) \\ \quad = (\delta\varphi, A^*\overline{\psi} - \bar{\lambda}(\overline{\psi}, \varphi_0)\varphi_0) + (A\varphi - \lambda(\varphi, \varphi_0)\varphi_0, \delta\overline{\psi}). \end{cases} \tag{4.4}$$

Therefore J_λ is stationary if and only if

$$A\varphi = \lambda(\varphi, \varphi_0)\varphi_0, \quad A^*\overline{\psi} = \bar{\lambda}(\overline{\psi}, \varphi_0)\varphi_0. \tag{4.5}$$

Theorem 3 (Schwinger's variational principle). *There exists exactly one value of λ, λ_1, such that J_λ can be made stationary. λ_1 is equal to the value of J when J is made stationary subject to the constraint* (4.2). *Simultaneously, $\lambda_1 = \frac{1}{(\varphi_1, \varphi_0)}$. The pair, φ, ψ make J stationary subject to* (4.2) *if and only if there exists an $\alpha \neq 0$ such that $\varphi = \alpha\lambda_1\varphi_1$, $\psi = \frac{1}{\alpha}\lambda_1\psi_1$.*

Proof. Since we are assuming (2.10), let $\lambda = \frac{1}{(\varphi_1, \varphi_0)} = \frac{1}{(\varphi_0, \overline{\psi}_1)}$. The last equality follows from theorem 2. Then the pair φ_1, ψ_1 satisfy (4.5). Thus, J_λ can be made stationary. On the other hand, if J_λ can be made stationary, there exists a pair, φ, ψ such that (4.5) holds. From theorem 1, A and A^* have bounded inverses, so $\lambda(\varphi, \varphi_0) \neq 0$ and $\bar{\lambda}(\overline{\psi}, \varphi_0) \neq 0$. Then it is an easy matter, from the uniqueness of the solutions of (2.8), to see that $\varphi = \lambda(\varphi, \varphi_0)\varphi_1$, $\psi = \lambda(\varphi_0, \overline{\psi})\psi_1$. But then taking the inner product of the first of these with

φ_0, we find that $\lambda(\varphi_1, \varphi_0) = 1$. Thus $\lambda = \lambda_1$ is uniquely determined. If φ and ψ satisfy (4.2), from (4.5) we obtain $\lambda = (A\varphi, \overline{\psi})$, and from above, we obtain $\varphi = \alpha\lambda_1\varphi_1$, $\psi = \frac{1}{a}\lambda_1\psi_1$, where $\alpha = (\varphi, \varphi_0)$. Finally, for every $\alpha \neq 0$, $\alpha\lambda_1\varphi_1$, $\frac{1}{a}\lambda_1\psi_1$ satisfy both (4.5) and (4.2). To emphasize the importance of (2.10), we state explicitly:

COROLLARY. *If* $(\varphi_1, \varphi_0) = 0$ *there does not exist a* λ *such that* J_λ *can be made stationary, and consequently,* J *cannot be made stationary subject to* (4.2).

The next theorem shows that in the application of the variational principle it is not necessary to distinguish between H and $L^{(2)}(-\infty, \infty)$. Our use of the space H has been a convenience for the easier statement and proof of theorem 3.

THEOREM 4. *Let* φ *and* $\overline{\psi}$ *be in* $L^{(2)}(-\infty, \infty)$. *Then* φ *and* $\overline{\psi}$ *have unique expresentations as* $\varphi' + \varphi''$, $\overline{\psi}' + \overline{\psi}''$, *respectively, where* φ' *and* $\overline{\psi}'$ *are in* H_1, $A\varphi''$ *and* $\overline{\psi}''$ *are in* H $(A\varphi, \overline{\psi}) = (A\varphi'', \overline{\psi}'')$, *and* $(\varphi, \varphi_0)(\varphi_0, \overline{\psi}) = (\varphi'', \varphi_0)(\varphi_0, \overline{\psi}'')$.

PROOF. The proof follows easily from lemma 3. In the language of § 3, in the application of the variational principle, the failure to factor out those functions which correspond to bound states has no effect on the computed quantities, although it destroys the uniqueness of the solutions to (2.8).

THEOREM 5. *Let* $\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1$, *where* μ_1 *and* ν_1 *are real. Then*

$$\nu_1 = \frac{1}{4k}\left[1 + \frac{|(\varphi_1, \overline{\varphi}_0)|^2}{|(\varphi_1, \varphi_0)|^2}\right]. \tag{4.10}$$

PROOF.

$$2i\nu_1 = \frac{(\varphi_0, \varphi_1) - (\varphi_1, \varphi_0)}{|(\varphi_1, \varphi_0)|^2} = \frac{(A\varphi_1, \varphi_1) - (\varphi_1, A\varphi_1)}{|(\varphi_1, \varphi_0)|^2} = -\left\{\frac{(K\varphi_1, \varphi_1) - (\varphi_1, K\varphi_1)}{|(\varphi_1, \varphi_0)|^2}\right\}.$$

Using this and (2.5) we obtain (4.10). This theorem is the one-dimensional counterpart of the total cross-section theorem [7], [9]. It shows that the imaginary part of λ_1 is determined by the ratio of the reflected energy to the transmitted energy. If one assumes conservation of particles, theorem 5 can be proved analogously to the proof given by Schiff in the three-dimensional case [L. I. Schiff, Proc. Theor. Physics **11**, 288 (1954)]. The authors are indebted to Professor Schiff for this observation.

§ 5. The quadratic formulation

The variational principle stated in § 4 is in terms of a bilinear form and a bilinear constraint. We shall now show that the principle can be formulated as a quadratic problem. This will facilitate a heuristic understanding of the principle, and make clear the geometry of the "saddle" nature of the stationary point.

We introduce the space

$$\underline{H} = H \oplus H. \tag{5.1}$$

The elements of $\underline{H}$ will be of the form

$$\underline{\varphi} = [\varphi, \psi], \tag{5.2}$$

where φ and ψ are in H. If $\underline{\varphi}' = [\varphi', \psi']$ and $\underline{\varphi}'' = [\varphi'', \psi'']$ are in $\underline{H}$, their inner product will be given by

$$(\underline{\varphi}', \underline{\varphi}'') = (\varphi', \varphi'') + (\psi', \psi''). \tag{5.3}$$

We now state two lemmas. Their proofs are matters of routine computation, and hence will be omitted.

Lemma 5. *Let $\underline{C}$ be a mapping of $\underline{H}$ into $\underline{H}$ defined by*

$$\underline{C}\,\underline{\varphi} = \underline{C}\,[\varphi, \psi] = [\overline{\psi}, \overline{\varphi}]. \tag{5.4}$$

Then $\underline{C}^2 = \underline{I}$ (identity), $(\underline{C}\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\underline{\psi}) = (\underline{\psi}, \underline{\varphi})$, $\underline{C}\,(\lambda\,\underline{\varphi}) = \overline{\lambda}\,\underline{C}\,\underline{\varphi}$. If $\underline{C}\,\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$ and $\underline{C}\,\underline{\psi} = \underline{\psi}$, then $(\underline{\varphi}, \underline{\psi}) = (\underline{\psi}, \underline{\varphi})$ and this inner product is real. If

$$\underline{\varphi}_0 = [\varphi_0, \overline{\varphi}_0], \quad \underline{\psi}_0 = [\varphi_0, -\overline{\varphi}_0], \tag{5.5}$$

then

$$\underline{C}\,\underline{\varphi}_0 = \underline{\varphi}_0, \quad \underline{C}\,\underline{\psi}_0 = -\underline{\psi}_0. \tag{5.6}$$

Lemma 6. *Let $\underline{L}$ be the mapping of $\underline{H}$ into $\underline{H}$ defined by*

$$\underline{L}\,\underline{\varphi} = \underline{L}\,[\varphi, \psi] = [A\,\varphi, A\,\psi]. \tag{5.8}$$

Then, $\underline{L}$ is a linear operator; $\underline{L}^*$ the conjugate of $\underline{L}$ is given by

$$\underline{L}\,\underline{\varphi} = [A^*\varphi, A^*\psi], \tag{5.9}$$

and

$$\underline{L}^*\underline{C} = \underline{C}\,\underline{L}. \tag{5.10}$$

Now we define

$$\underline{J} = 2\,(\underline{L}\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\underline{\varphi}). \tag{5.11}$$

We shall consider the problem of making $\underline{J}$ stationary subject to the constraint,

$$(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)^2 - (\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)^2 = 4. \tag{5.12}$$

As in § 4, we introduce the Lagrange multiplier, λ, and set

$$\underline{J}_\lambda = \underline{J} - \lambda\,\{(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)^2 - (\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)^2\}. \tag{5.13}$$

Then,

$$\begin{cases} \delta\,\underline{J}_\lambda = 2\,(\underline{L}\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\delta\,\underline{\varphi}) + 2\,(\underline{L}\,\delta\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\underline{\varphi}) - \\ \qquad - 2\lambda\,\{(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)\,(\delta\,\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0) - (\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)\,(\delta\,\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)\} \\ \qquad = 2\,(\delta\,\underline{\varphi}, 2\underline{C}\,\underline{L}\,\varphi - \overline{\lambda}\,\{(\underline{\varphi}_0, \underline{\varphi})\,\underline{\varphi}_0 - (\underline{\psi}_0, \underline{\varphi})\,\underline{\psi}_0\}). \end{cases} \tag{5.14}$$

This last equality makes use of (5.10) and lemma 5. Making use of lemma 5, we find that J_λ is stationary if and only if

$$2\underline{L}\,\underline{\varphi} = \lambda\{(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)\,\underline{\varphi}_0 + (\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)\,\underline{\psi}_0\}. \tag{5.15}$$

But

$$(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0) = (\varphi, \varphi_0) + (\psi, \overline{\varphi}_0); \quad (\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0) = (\varphi, \varphi_0) - (\psi, \overline{\varphi}_0). \tag{5.16}$$

Therefore

$$(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)\,\underline{\varphi}_0 + (\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)\,\underline{\psi}_0 = [2(\varphi, \varphi_0)\,\varphi_0, 2(\psi, \overline{\varphi}_0)\,\overline{\varphi}_0]. \tag{5.17}$$

Therefore, $\underline{J}_\lambda$ is stationary at $\underline{\varphi} = [\varphi, \psi]$ if and only if

$$A\varphi = \lambda(\varphi, \varphi_0)\,\varphi_0, \quad A^*\overline{\psi} = \overline{\lambda}(\overline{\psi}, \varphi_0)\,\varphi_0. \tag{5.18}$$

This is a consequence of (5.17), (5.15), lemma 6, and (2.3). We have proved the following theorem:

THEOREM 6. *There is a unique value of λ, λ_1, such that $\underline{J}_{\lambda_1}$ can be made stationary. λ_1 is the stationary value of J subject to the constraint* (5.12). *λ_1 is the same as in theorem* 3. *$\underline{\varphi}_1 = [\lambda_1\varphi_1, \lambda_1\psi_1]$ is a stationary point, and all other stationary points are of the form* $\underline{\varphi}(\alpha) = \left[\alpha\lambda_1\varphi_1, \frac{1}{\alpha}\lambda_1\psi_1\right]$, $\alpha \neq 0$.

A heuristic interpretation of theorem 6 is that we are finding that member of a family of quadric surfaces which is tangent to a fixed hyperboloid. The tangency takes place along a one (complex) parameter curve, $\underline{\varphi}(\alpha)$, in the surface (5.12). If we re-paramatrize the curve $\underline{\varphi}(\alpha)$ by letting $\alpha = e^\beta$, we see that the curve $\underline{\varphi}(\alpha)$ is the orbit of $\underline{\varphi}_1$ under the analytic group of operators $e^{\underline{B}\beta}$, where $\underline{B}\,\underline{\varphi} = \underline{B}[\varphi, \psi] = [\varphi, -\psi]$ [3].

§ 6. The imaginary part of $\underline{J}$

If $\underline{\varphi}$ is a stationary point, and if $\underline{\varphi} + \delta\underline{\varphi}$ is any point which lies on the surface (5.12), we define

$$\begin{cases} \Delta\underline{J} = 2\left(\underline{L}\,(\underline{\varphi} + \delta\underline{\varphi}), \underline{C}\,(\underline{\varphi} + \delta\underline{\varphi})\right) - 2(\underline{L}\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\underline{\varphi}) \\ \quad = 4(\underline{L}\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\delta\underline{\varphi}) + 2(\underline{L}\,\delta\underline{\varphi}, \underline{C}\,\delta\underline{\varphi}). \end{cases} \tag{6.1}$$

Since both $\underline{\varphi}$ and $\underline{\varphi} + \delta\underline{\varphi}$ satisfy (5.12), we have

$$2\left((\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)\,\underline{\varphi}_0 + (\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)\,\underline{\psi}_0, \underline{C}\,\delta\underline{\varphi}\right) + (\delta\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)^2 - (\delta\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)^2 = 0. \tag{6.2}$$

But at a stationary point (5.15) holds. Combining this with (6.1) and (6.2) we secure

$$\Delta\underline{J} = 2(\underline{L}\,\delta\underline{\varphi}, \underline{C}\,\delta\underline{\varphi}) - \lambda_1\{(\delta\underline{\varphi}, \underline{\varphi}_0)^2 - (\delta\underline{\varphi}, \underline{\psi}_0)^2\}. \tag{6.3}$$

LEMMA 7. *If $\underline{\varphi}$ is in $\underline{H}$, we define*

$$\underline{u} = \frac{1}{2}(\underline{\varphi} + \underline{C}\,\underline{\varphi}), \quad \underline{v} = \frac{1}{2i}(\underline{\varphi} - \underline{C}\,\underline{\varphi}). \tag{6.4}$$

Then

$$\underline{\varphi} = \underline{u} + i\,\underline{v}, \quad \underline{C}\,\underline{u} = \underline{u}, \quad \underline{C}\,\underline{v} = \underline{v}.$$

Also

$$\frac{1}{2}(\underline{\varphi}_0 + \underline{C}\,\underline{\varphi}_0) = \underline{\varphi}_0, \qquad \frac{1}{2i}(\underline{\psi}_0 - \underline{C}\,\underline{\psi}_0) = -i\,\underline{\psi}_0,$$

$$\frac{1}{2i}(\underline{\varphi}_0 - \underline{C}\,\underline{\varphi}_0) = 0, \qquad \frac{1}{2}(\underline{\psi}_0 + \underline{C}\,\underline{\psi}_0) = 0.$$

We define

$$\underline{u}_0 = \underline{\varphi}_0; \quad \underline{v}_0 = -i\,\underline{\psi}_0. \tag{6.5}$$

Then

$$\underline{C}\,\underline{u}_0 = \underline{u}_0, \quad \underline{C}\,\underline{v}_0 = \underline{v}_0.$$

Proof. Direct computation, using lemma 5.

Lemma 8. *Let*

$$\underline{G} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^*), \qquad \underline{F} = \frac{1}{2i}(\underline{L} - \underline{L}^*). \tag{6.6}$$

Then, $\underline{L} = \underline{G} + i\,\underline{F}$, $\underline{G}$ and $\underline{F}$ are self-adjoint operators, and $\underline{F}$ is positive semi-definite. Both $\underline{G}$ and $\underline{F}$ commute with $\underline{C}$, and if $\underline{C}\,\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$, $\underline{C}\,\underline{\psi} = \underline{\psi}$, then $(\underline{F}\,\underline{\varphi}, \underline{\psi}) = (\underline{\psi}, \underline{F}\,\underline{\varphi}) = (\underline{\varphi}, \underline{F}\,\underline{\psi}) = (\underline{F}\,\underline{\psi}, \underline{\varphi})$, and this inner product is real. Similarly for $\underline{G}$.

Proof. The first two assertions are obvious. To prove that $\underline{F}$ is positive semi-definite, we let $\underline{\varphi} = [\varphi, \psi]$. Then

$$\left\{\begin{aligned}
(\underline{F}\,\underline{\varphi}, \underline{\varphi}) &= \frac{1}{2i}(\underline{L}\,\underline{\varphi}, \underline{\varphi}) - \frac{1}{2i}(\underline{L}^*\underline{\varphi}, \underline{\varphi}) \\
&= \frac{1}{2i}\left([A\varphi, A\psi], [\varphi, \psi]\right) - \frac{1}{2i}\left([A^*\varphi, A^*\psi], [\varphi, \psi]\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left\{((A - A^*)\varphi, \varphi) + ((A - A^*)\psi, \psi)\right\} \\
&= -\frac{1}{2i}\left\{((K - K^*)\varphi, \varphi) + ((K - K^*)\psi, \psi)\right\} \\
&= -\left\{(F\varphi, \varphi) + (F\psi, \psi)\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{6.7}$$

Therefore, from lemma 3, $(\underline{F}\,\underline{\varphi}, \underline{\varphi}) \geqq 0$. Now

$$\underline{C}\,\underline{F} = -\frac{1}{2i}(\underline{C}\,\underline{L} - \underline{C}\,\underline{L}^*) = \frac{1}{2i}(\underline{L}\,\underline{C} - \underline{L}^*\,\underline{C}) = \underline{F}\,\underline{C},$$

from lemmas 5 and 6. Similarly $\underline{C}\,\underline{G} = \underline{G}\,\underline{C}$. Finally,

$$(\underline{F}\,\underline{\varphi}, \underline{\psi}) = (\underline{F}\,\underline{C}\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\underline{\psi}) = (\underline{C}\,\underline{F}\,\underline{\varphi}, \underline{C}\,\underline{\psi}) = (\underline{\psi}, \underline{F}\,\underline{\varphi}),$$

from lemma 5. The other equalities follow from the self-adjointness of $\underline{F}$. Similarly for $\underline{G}$. This completes the proof.

Returning to ΔJ, setting

$$\delta\underline{\varphi} = \delta\underline{u} + i\,\delta\underline{v}, \tag{6.8}$$

where $\underline{C}\,\delta\underline{u}=\delta\underline{u}$, $\underline{C}\,\delta\underline{v}=\delta\underline{v}$ (lemma 7), we have

$$\underline{L}\,\delta\underline{\varphi}=(\underline{G}+i\underline{F})(\delta\underline{u}+i\,\delta\underline{v})=(\underline{G}\,\delta\underline{u}-\underline{F}\,\delta\underline{v})+i(\underline{F}\,\delta\underline{u}+\underline{G}\,\delta\underline{v}), \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}(\underline{L}\,\delta\underline{\varphi},\underline{C}\,\delta\underline{\varphi}) &= \{(\underline{G}\,\delta\underline{u}-\underline{F}\,\delta\underline{v})+i(\underline{F}\,\delta\underline{u}+\underline{G}\,\delta\underline{v})\},\delta\underline{u}-i\,\delta\underline{v})\\ &=\{(\underline{G}\,\delta\underline{u}-\underline{F}\,\delta\underline{v};\delta\underline{u})-(\underline{F}\,\delta\underline{u}+\underline{G}\,\delta\underline{v},\delta\underline{v})\}+\\ &\quad+i\{(\underline{F}\,\delta\underline{u}+\underline{G}\,\delta\underline{v},\delta\underline{u})+(\underline{G}\,\delta\underline{u}-\underline{F}\,\delta\underline{v},\delta\underline{v})\}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Now

$$(\delta\underline{\varphi},\underline{\varphi}_0)=(\delta\underline{u}+i\,\delta\underline{v},\underline{u}_0)=(\delta\underline{u},\underline{u}_0)+i(\delta\underline{v},\underline{u}_0), \tag{6.11}$$

$$(\delta\underline{\varphi},\underline{\psi}_0)=(\delta\underline{u}+i\,\delta\underline{v},i\,\underline{v}_0)=(\delta\underline{v},\underline{v}_0)-i(\delta\underline{u},\underline{v}_0). \tag{6.12}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}(\delta\underline{\varphi},\underline{\varphi}_0)^2-(\delta\underline{\varphi},\underline{\psi}_0)^2 &=\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2\}\\ &\quad+2i\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)(\delta\underline{v},\underline{v}_0)\}.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Then,

$$\begin{aligned}&\lambda_1\{(\delta\underline{\varphi},\underline{\varphi}_0)^2-(\delta\underline{\varphi},\underline{\psi}_0)^2\}\\ &\quad=[\mu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2\}-\\ &\qquad-2\nu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)(\delta\underline{v},\underline{v}_0)\}]+\\ &\qquad+i[\nu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2\}+\\ &\qquad+2\mu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)(\delta\underline{v},\underline{v}_0)\}].\end{aligned} \tag{6.14}$$

LEMMA 9. *If* $\underline{J}=\underline{P}+i\,\underline{Q}$, $\underline{P}$ *and* $\underline{Q}$ *real, then* $\Delta\underline{J}=\Delta\underline{P}+i\Delta\underline{Q}$, *and*

$$\begin{aligned}\Delta\underline{P}&=2\{(\underline{G}\,\delta\underline{u},\delta\underline{u})-(\underline{G}\,\delta\underline{v},\delta\underline{v})-2(\underline{F}\,\delta\underline{u},\delta\underline{v})\}-\\ &\quad-\mu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2\}+\\ &\quad+2\nu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)(\delta\underline{v},\underline{v}_0)\}.\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}\Delta\underline{Q}&=2\{(\underline{F}\,\delta\underline{u},\delta\underline{u})-(\underline{F}\,\delta\underline{v},\delta\underline{v})+2(\underline{G}\,\delta\underline{u},\delta\underline{v})\}-\\ &\quad-\nu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2\}-\\ &\quad-2\mu_1\{(\delta\underline{u},\underline{u}_0)(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)(\delta\underline{v},\underline{v}_0)\}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

PROOF. (6.15) and (6.17) are obtained by combining (6.3), (6.10), and (6.14) and observing that all the inner products are real (lemma 5). The effect of lemma 9 is to express the increments of the real and imaginary parts of $\underline{J}$, as we move along the constraining surface, (5.12), away from a stationary point as real quadratic forms in $\delta\underline{u}$ and $\delta\underline{v}$. Since all the inner products which appear are real, we can think of the pair $\delta\underline{u}$, $\delta\underline{v}$ as being a point in the direct sum of two *real* Hilbert spaces. It should be observed however that these real Hilbert spaces are not spaces of real functions, but rather complicated spaces built up by using direct sums of complex function spaces and conjugation.

Lemma 10. *Let $\underline{u}$ and $\underline{v}$ be obtained from the stationary point $\varphi(\alpha)$* (theorem 6) *according to* (6.4). Then

$$(6.17)\qquad (\underline{u},\underline{u}_0)=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}\left[\frac{|\alpha|^2+1}{|\alpha|^2}\right];\quad (\underline{u},\underline{v}_0)=-\frac{(\alpha-\bar{\alpha})}{2i}\left[\frac{|\alpha|^2+1}{|\alpha|^2}\right],$$

$$(6.18)\qquad (\underline{v},\underline{u}_0)=\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}\left[\frac{|\alpha|^2-1}{|\alpha|^2}\right];\quad (\underline{v},\underline{v}_0)=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}\left[\frac{|\alpha|^2-1}{|\alpha|^2}\right].$$

In general, if $\underline{\varphi}$ lies on (5.12), and $\underline{u}$ and $\underline{v}$ are given by (6.4), then

$$(6.19)\qquad (\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\underline{u},\underline{v}_0)^2-(\underline{v},\underline{u}_0)^2-(\underline{v},\underline{v}_0)^2=4,$$

$$(6.20)\qquad (\underline{u},\underline{u}_0)\,(\underline{v},\underline{u}_0)+(\underline{u},\underline{v}_0)\,(\underline{v},\underline{v}_0)=0.$$

Proof. We shall carry out the computation for the first equation in (6.17).

$$\begin{aligned}(\underline{u},\underline{u}_0)&=\tfrac{1}{2}\,(\underline{\varphi}(\alpha)+\underline{C}\,\underline{\varphi}(\alpha),\underline{\varphi}_0)=\tfrac{1}{2}\,(\underline{\varphi}(\alpha),\underline{\varphi}_0)+\tfrac{1}{2}\,(\underline{\varphi}(\alpha))\\&=\tfrac{1}{2}\left(\left[\alpha\,\lambda_1\varphi_1,\tfrac{1}{\alpha}\,\lambda_1\psi_1\right],\,[\varphi_0,\bar{\varphi}_0]\right)+\tfrac{1}{2}\left([\varphi_0,\bar{\varphi}_0],\left[\alpha\,\lambda_1\varphi_1,\tfrac{1}{\alpha}\,\lambda_1\psi_1\right]\right)\\&=\tfrac{1}{2}\left\{\alpha+\tfrac{1}{\alpha}+\bar{\alpha}+\tfrac{1}{\alpha}\right\}=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}\left[\frac{|\alpha|^2+1}{|\alpha|^2}\right].\end{aligned}$$

The remaining equations in (6.17) and (6.18) are derived in a similar manner. As for (6.19) and (6.20), they are obtained analogously to (6.13).

Theorem 7. *Let $\underline{u}$ and $\underline{v}$ be obtained by* (6.4) *from the stationary point $\underline{\varphi}(\alpha)$. Let $\delta\underline{u}$ and $\delta\underline{v}$ be similarly obtained from $\delta\underline{\varphi}$, where $\underline{\varphi}(\alpha)+\delta\underline{\varphi}$ satisfies* (5.12). *Then*

(a) *If $|\alpha|\neq 1$ there exists an $\varepsilon<0$, such that in the weak neighborhood of $\underline{\varphi}(\alpha)$ defined by $(\delta\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)^2<\varepsilon$, $(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2<\varepsilon$, the increment in the imaginary part of $\underline{J}$ satisfies*

$$(6.21)\qquad \Delta Q]_{\delta\underline{u}=0}=-(\underline{F}\,\delta\underline{v},\delta\underline{v})\leq 0,$$

$$(6.22)\qquad \Delta Q]_{\delta\underline{v}=0}=(\underline{F}\,\delta\underline{u},\delta\underline{u})\geq 0.$$

(b) *If $|\alpha|=1$, then $\Delta Q]_{\delta\underline{u}=0}=-(\underline{F}\,\delta\underline{v},\delta\underline{v})\leq 0$.*

Proof. Expanding (6.2) with the help of (6.13), we obtain

$$(6.23)\qquad \begin{aligned}&2\{(\underline{u},\underline{u}_0)\,(\delta\underline{u},\underline{u}_0)+(\underline{u},\underline{v}_0)\,(\delta\underline{u},\underline{v}_0)-(\underline{v},\underline{u}_0)\,\delta\underline{v},\underline{u}_0)-(\underline{v},\underline{v}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{v}_0)\}+\\&\quad+(\delta\underline{u},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2-(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2=0,\end{aligned}$$

$$(6.24)\qquad \begin{aligned}&(\underline{u},\underline{u}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\underline{u},\underline{v}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{v}_0)+(\underline{v},\underline{u}_0)\,(\delta\underline{u},\underline{u}_0)+(\underline{v},\underline{v}_0)\,(\delta\underline{u},\underline{v}_0)+\\&\quad+(\delta\underline{u},\underline{u}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\delta\underline{u},\underline{v}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{v}_0)=0.\end{aligned}$$

(a) Suppose $\delta\underline{u}=0$. Then $\delta\underline{v}$ must satisfy

$$(6.25)\qquad 2\{(\underline{v},\underline{u}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\underline{v},\underline{v}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{v}_0)\}+(\delta\underline{v},\underline{u}_0)^2+(\delta\underline{v},\underline{v}_0)^2=0$$

$$(6.26)\qquad (\underline{u},\underline{u}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{u}_0)+(\underline{u},\underline{v}_0)\,(\delta\underline{v},\underline{v}_0)=0.$$

From lemma 10, it is clear that not both $(\underline{u}, \underline{u}_0) = 0$ and $(\underline{v}, \underline{v}_0) = 0$. Therefore, from the homogeneity of (6.20) and (6.26), we have

$$(\delta \underline{v}, \underline{u}_0)(\underline{v}, \underline{v}_0) - (\delta \underline{v}, \underline{v}_0)(\underline{v}, \underline{u}_0) = 0. \tag{6.27}$$

But (6.27) and (6.25) imply by Cramer's Rule that either

$$(\delta \underline{v}, \underline{u}_0) = (\delta \underline{v}, \underline{v}_0) = 0, \tag{6.28}$$

or

$$(\delta \underline{v}, \underline{u}_0) = -2(\underline{v}, \underline{u}_0); \quad (\delta \underline{v}, \underline{v}_0) = -2(\underline{v}, \underline{v}_0). \tag{6.29}$$

If (6.29) holds, then, from (6.18), we have

$$(\delta \underline{v}, \underline{u}_0)^2 + (\delta \underline{v}, \underline{v}_0)^2 = 4\left(|\alpha| - \frac{1}{|\alpha|}\right)^2. \tag{6.30}$$

Let $\delta \underline{v} = 0$. Then $\delta \underline{u}$ must satisfy

$$2\{(\underline{u}, \underline{u}_0)(\delta \underline{u}, \underline{u}_0) + (\underline{u}, \underline{v}_0)(\delta \underline{u}, \underline{v}_0)\} + (\delta \underline{u}, \underline{u}_0)^2 + (\delta \underline{u}, \underline{v}_0)^2 = 0, \tag{6.31}$$

$$(\underline{v}, \underline{u}_0)(\delta \underline{u}, \underline{u}_0) + (\underline{v}, \underline{v}_0)(\delta \underline{u}, \underline{v}_0) = 0. \tag{6.32}$$

Since it follows from (6.18) that not both $(\underline{v}, \underline{u}_0) = 0$ and $(\underline{v}, \underline{v}_0) = 0$, we find that here $\delta \underline{u}$ must satisfy either

$$(\delta \underline{u}, \underline{u}_0) = (\delta \underline{u}, \underline{v}_0) = 0 \tag{6.33}$$

or

$$(\delta \underline{u}, \underline{u}_0)^2 + (\delta \underline{u}, \underline{v}_0)^2 = 4\left(|\alpha| + \frac{1}{|\alpha|}\right)^2. \tag{6.34}$$

If we let $\varepsilon \leqq 4\left(|\alpha| - \frac{1}{|\alpha|}\right)^2$, then in the neighborhood determined by this ε, when $\delta \underline{u} = 0$ (6.30) is excluded, and when $\delta \underline{v} = 0$, (6.34) is excluded. Therefore, from (6.16), (6.28), and (6.33) in this neighborhood (6.21) and (6.22) are valid.

(b) $|\alpha| = 1$. The discussion above applies through (6.30). But if $|\alpha| = 1$, both (6.28) and (6.30) imply $(\delta \underline{v}, \underline{v}_0) = (\delta \underline{v}, \underline{u}_0) = 0$, so the theorem is proved. We can now interpret theorem 7 in terms of the principle formulated in § 4.

COROLLARY. *Let* $\varphi_s = \alpha \lambda_1 \varphi_1$, $\psi_s = \frac{1}{\alpha} \lambda_1 \psi_1$ *be a pair of functions which make* $J = (A\varphi, \underline{\psi})$ *stationary subject to the constraint* $(\varphi, \varphi_0)(\varphi_0, \overline{\psi}) = 1$. *Then if* φ *and* ψ *are varied about* φ_s, ψ_s *subject to the constraint, then*

(a) *if* $|\alpha| \neq 1$, *and if* $\varphi + \overline{\psi}$ *is held constant, then* Im J *will have a local maximum at* φ_s, ψ_s. *If* $\varphi - \overline{\psi}$ *is held constant,* Im J *will have a local minimum at* φ_s, ψ_s.

(b) *if* $|\alpha| = 1$, *and if* $\varphi + \overline{\psi}$ *is held constant, then* Im J *will have a global maximum.*

§ 7. The variational principle for the reflection amplitude

The complex reflection amplitude in one dimensional quantum scattering is given by

$$\frac{1}{\mu_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) V(x) e^{+ikx} dx \tag{7.1}$$

where $\omega(x)$ is the solution of the integral equation (3.4). If, as before φ_0 is defined by (2.4), the appropriate integral equations corresponding to the set (2.8) are

$$A\varphi = \varphi_0, \quad A^*\overline{\psi} = \overline{\varphi}_0. \tag{7.2}$$

As noted in the proof of theorem 1, these equations have a unique solution in H. Moreover in view of lemma 1, here $\overline{\psi} = \overline{\varphi}$. The reciprocity relation corresponding to (2.9) reduces here to the trivial statement that

$$(\varphi_0, \overline{\varphi}) = (\varphi, \overline{\varphi}_0).$$

Now if φ_1 once again is the unique solution to the first of the set (7.2), then

$$\frac{1}{\mu_1} = (\varphi_1, \overline{\varphi}_0)$$

so that here we may treat (7.2) instead of (3.4).

The variational principle for the determination of $1/\mu_1$ consists in this case of making

$$J^R = (A\varphi, \overline{\varphi}), \tag{7.3}$$

stationary subject to the constraint

$$(\varphi, \overline{\varphi}_0) = 1. \tag{7.4}$$

To accomplish this, we introduce the Lagrange multiplier μ, and set

$$J^R_\mu = J^R - 2\mu(\varphi, \overline{\varphi}_0)$$

and obtain the result that J^R is stationary if and only if

$$A\varphi = \mu\varphi_0.$$

This last equation corresponds to the set (4.5). Here, as in the set (7.2), the second equation is merely the conjugate of this and consequently it may be omitted. Equation (7.4) is simpler in appearance than the set (4.5) since here we may use a linear rather than a quadratic constraint. Actually, if we think of the variational principles (5.11), (5.12), or (5.13) abstractly; that is, independent of the interpretation given to them in § 5, (7.3) and (7.4) can be thought of as special cases of (5.11) and (5.12) obtained by replacing φ_0 by $C\varphi_0$, setting ψ_0 equal to zero and interpreting C as usual conjugation. While a more unified treatment would result if (5.13) were similarly specialized, the simplifications resulting from the use of a linear rather than a quadratic restraint make the use of (7.4) preferable.

In order to obtain a theorem analogous to theorem 3, we now make the additional assumption that $(\varphi_1, \overline{\varphi}_0) \neq 0$. Physically this assumption is of course equivalent to assuming that the potential barrier is at least partially reflecting. It is moreover, not equivalent to assuming that the potential barrier is not transparent [i.e., that $(\varphi_1, \varphi_0) \neq 0$]. It is interesting to note

that the existence of partial reflection implies the existence of partial transmission. More explicitly we have the following:

LEMMA 11. *Let φ_1 be the unique solution to (7.2). Then $(\varphi_1, \bar{\varphi}_0) \neq 0$ implies that $(\varphi_1, \varphi_0) \neq 0$.*

PROOF. The argument immediately below equation (3.15) shows that $(\varphi_1, \varphi_0) = 0$ implies $(\varphi_1, \bar{\varphi}_0) = 0$. The lemma follows by logical equivalence.

THEOREM 8. *There exists exactly one value of μ, μ_1, such that J^R can be made stationary. μ_1 is equal to the value of J^R when J^R is made stationary subject to the constraint (7.4). Simultaneously,*

$$\mu_1 = \frac{1}{(\varphi_1, \bar{\varphi}_0)}.$$

Since the proof is nearly identical to that of theorem 3, we will content ourselves with remarking that if φ_s satisfies (7.5) it must be of the form $\varphi_s = \mu\varphi_1$, since φ_1 is the unique solution of (7.2). Moreover since φ_s must also satisfy (7.4), it follows that $\mu(\varphi_1, \bar{\varphi}_0) = 1$. Now (7.5) implies that

$$(A\varphi, \bar{\varphi}) = \mu(\varphi_0, \bar{\varphi}) = \mu.$$

Finally, in analogy to the corollary of theorem 7, we have

THEOREM 9. *Let $\varphi_s = \mu\varphi_1$ be any function which makes $J^R = (A\varphi, \bar{\varphi})$ stationary subject to the constraint $(\varphi, \bar{\varphi}_0) = 1$, then*

(a) *if $\varphi + \bar{\varphi}$ is held constant,* Im J^R *will have a global minimum at φ_s;*

(b) *if $\varphi - \bar{\varphi}$ is held constant,* Im J^R *will have a global maximum at φ_s;*

PROOF. Since here we are dealing with the linear constraint (7.4), the second variations of J^R and J_u^R are identical for any function φ_s which makes them stationary. The nature of the stationary point is therefore determined completely by the second variation $\delta^2 J^R$ which is

$$\delta^2 J^R = (A\,\delta\varphi, \delta\bar{\varphi}).$$

From this we find from (2.3),

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} \delta^2 J^R &= (A\,\delta\varphi, \delta\bar{\varphi}) - \overline{(A\,\delta\varphi, \delta\bar{\varphi})} \\ &= (A\,\delta\varphi, \delta\bar{\varphi}) - (A^*\,\delta\bar{\varphi}, \delta\varphi) \\ &= (\delta\varphi, \delta\bar{\varphi}) - (\delta\bar{\varphi}, \delta\varphi) + (K\,\delta\varphi, \delta\bar{\varphi}) - (K^*\,\delta\bar{\varphi}, \delta\varphi). \end{aligned}$$

Letting $\varphi = u + iv$ where u and v are real so that

$$\delta\varphi = \delta u + i\,\delta v$$

and using (2.6) we find that

$$2 \operatorname{Im} \delta^2 J^R = 2(\delta u, \delta v) + (F\,\delta u, \delta u) - (F\,\delta v, \delta v) + 2(G\,\delta u, \delta v).$$

The theorem then follows from lemma 3 since F is negative semi-definite.

In conclusion it should be remarked that we have been unable to find useful analog of theorem 5 for this case.

References

[1] Dolph, C. L.: The Mathematician Grapples with Linear Problems Associated with the Radiation Condition. Trans. Inst. Radio Engineers PGAP, AP—4, (1956). — [2] Dunford, N.: Spectral operators. Pac. J. Math. **4**, 321—354 (1954). — [3] Hille, E.: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc., Colloquium Publ. **31** (1948). — [4] Jones, D. S.: A Critique of the Variational Method. Trans. Inst. Radio Engineers PGAP, AP—4, (1956). — [5] Kato, T.: Note on Schwinger Variational Principle. Progress of Theoretical Physics (Japan) **6**, 295—305 (1951). — [6] Marcuvitz, N.: Recent Developments in Wave Propagation, Notes, Part III-D. New York University 1953. — [7] Morse and Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Vol II, Chapters 9, 11. New York: McGraw Hill 1953. — [8] Riesz, F., and B. Sz. Nagy: Lecons d'Analyse Fonctionnelle. Budapest 1952. — [9] Schwinger, J., and H. Levine: On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane Screen. I. Physical Review **74**, 958—974 (1948).

Engineering Res. Inst., University of Michigan, Ann Arbor, Mich. (U.S.A.)

(Eingegangen am 9. Januar 1956)

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung

Von Dr. **R. Courant**, Professor an der New York University, Institute of Mathematical Sciences, New York.

Zweiter Band: **Funktionen mehrerer Veränderlicher**
Dritte, verbesserte Auflage. Mit 110 Textfiguren. XI, 468 Seiten Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen DM 36.—

Inhaltsübersicht: **Vorbemerkungen über analytische Geometrie und Vektorrechnung.** Rechtwinklige Koordinaten und Vektoren. Dreiecksinhalt, Tetraedervolumen und äußere Vektormultiplikation. Die einfachsten Tatsachen über zwei- und dreireihige Determinanten. Die affinen Abbildungen und der Determinantenmultiplikationssatz. — **Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Ableitungen.** Der Funktionsbegriff bei mehreren Veränderlichen. Stetigkeit. Die Ableitungen einer Funktion. Das vollständige Differential einer Funktion und seine geometrische Bedeutung. Zusammengesetzte Funktionen und Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher. Der Mittelwertsatz und der TAYLORsche Satz bei mehreren unabhängigen Veränderlichen. Anwendungen des Vektorbegriffes. — Anhang: Das Häufungsstellenprinzip in mehreren Dimensionen und seine Anwendungen. Nähere Diskussion des Grenzbegriffes bei mehreren Veränderlichen. Homogene Funktionen. — **Ausbau und Anwendungen der Differentialrechnung.** Implizite Funktionen. Kurven und Flächen in impliziter Darstellung. Funktionensysteme, Transformationen und Abbildungen. Anwendungen. Kurvenscharen, Flächenscharen und ihre Einhüllenden. Maxima und Minima. — Anhang: Hinreichende Bedingungen für Extrema. Singuläre Punkte von ebenen Kurven. Singuläre Punkte von Flächen. Die Beziehung zwischen den EULERschen und LAGRANGEschen Darstellungen der Bewegung einer Flüssigkeit. Tangentialdarstellung einer geschlossenen Kurve. — **Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher.** Gewöhnliche Integrale als Funktionen eines Parameters. Das Integral einer stetigen Funktion über einen ebenen oder räumlichen Bereich. Zurückführung des Gebietsintegrals auf mehrfache gewöhnliche Integrale. Transformation der Gebietsintegrale. Uneigentliche Integrale. Geometrische Anwendungen. Physikalische Anwendungen. — Anhang: Die Existenz des Gebietsintegrals. Allgemeine Formel für den Flächeninhalt (oder Rauminhalt) eines durch Segmente von Geraden oder Ebenen begrenzten Bereiches (GULDINS Formel). Der Polarplanimeter. Volumen und Oberfläche bei beliebiger Anzahl von Dimensionen. Uneigentliche Integrale als Funktionen eines Parameters. Die FRESNELschen Integrale. Das FOURIERsche Integral. Die EULERschen Integrale (Gammafunktion). Differentiation und Integration von gebrochener Ordnung. Die ABELsche Integralgleichung. Zur Flächeninhaltsdefinition bei krummen Flächen. — **Integration über mehrdimensionale Bereiche. Fortsetzung.** Kurvenintegrale. Zusammenhang zwischen Kurvenintegralen und Gebietsintegralen in der Ebene. (Integralsätze von GAUSS, STOKES und GREEN.) Anschauliche Deutung und Anwendungen der Integralsätze in der Ebene. Oberflächenintegrale. Die Integralsätze von GAUSS und GREEN im Raum. Der Integralsatz von STOKES im Raum. Grundsätzliches über den Zusammenhang von Differentiation und Integration bei mehreren Veränderlichen. — Anhang: Bemerkungen zu den Sätzen von STOKES und GAUSS. Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes als Rotation. — **Anwendungen, insbesondere Differentialgleichungen.** Die Differentialgleichungen der Mechanik eines Massenpunktes. Beispiele zur Mechanik eines Massenpunktes. Weitere Beispiele von Differentialgleichungen. Lineare Differentialgleichungen. Allgemeines über Differentialgleichungen. Das Potential anziehender Ladungen. Weitere Beispiele partieller Differentialgleichungen. — Verzeichnis der wichtigsten Formeln und Sätze zu beiden Bänden. — Sachverzeichnis zum zweiten Bande.

Erster Band: **Funktionen einer Veränderlichen**
Dritte, verbesserte Auflage. Mit 126 Textfiguren. XI, 450 Seiten Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen DM 33.—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** Neue Folge.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Neuntes Heft: **Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie**

Von Dr. **Friedrich Hirzebruch,** Professor an der Princeton University, Princeton, N. J., USA. VIII, 165 Seiten Gr.-8°. 1956. DM 30.80

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Vorbereitungen: Formal-algebraische Vorbereitungen. — Garben. — Über stetige, differenzierbare und komplex-analytische Bündel. Vektorraum-Bündel. — Spezielle Fälle von Reduktionen der Strukturgruppe eines Bündels. Über Chernsche Klassen und Pontrjaginsche Klassen. — Die Thomsche Algebra. Anwendungen: Pontrjaginsche Zahlen. — Die Algebra $\tilde{\Omega} \otimes Q$. — Die Thomsche Algebra Ω. — Der Index einer $4k$-dimensionalen Mannigfaltigkeit. — Virtuelle Indizes. — Eigenschaften des Toddschen Geschlechtes und seiner Verallgemeinerungen: Das Toddsche Geschlecht. — Das virtuelle verallgemeinerte Toddsche Geschlecht. — Die T-Charakteristik eines $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-Bündels. — Spalt-Mannigfaltigkeiten und Aufspaltungsmethode. — Multiplikative Eigenschaften und Ganzzahligkeits-Eigenschaften des Toddschen Geschlechtes. — Der Satz von Riemann-Roch für algebraische Mannigfaltigkeiten: Cohomologiegruppen von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten mit Koeffizienten in gewissen komplex-analytischen Garben. — Weitere Eigenschaften der χ_T-Charakteristik. — Die virtuelle χ_T-Charakteristik. — Bericht über fundamentale Sätze von K. Kodaira. — Die virtuelle χ_T-Charakteristik für algebraische Mannigfaltigkeiten. — Riemann-Rochscher Satz für algebraische Mannigfaltigkeiten und komplex-analytische Geradenbündel. — Riemann-Rochscher Satz für algebraische Mannigfaltigkeiten und komplex-analytische Vektorraum-Bündel. — Literatur. — Namen- und Sachverzeichnis.

Die Theorie der Faserbündel und die von J. Leray entwickelte Theorie der Garben (faisceaux) wurde in letzter Zeit von mehreren Autoren erfolgreich auf die algebraische Geometrie angewandt. Das vorliegende Buch soll für die „klassische" algebraische Geometrie (komplexe Zahlen als Grundkörper) einen Beitrag zu dieser Entwicklung liefern. Es berichtet daher über Faserbündel und Garben und bringt Anwendungen. Bei diesen steht eine Verallgemeinerung des Satzes von Riemann-Roch auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension im Mittelpunkt, die etwa so lautet: „Die Euler-Poincarésche Charakteristik einer algebraischen Mannigfaltigkeit in bezug auf die Cohomologie mit Koeffizienten in gewissen durch komplex-analytische Vektorraum-Bündel gegebene Garben kann durch charakteristische Zahlen ausgedrückt werden, die nur von der differenzierbaren Struktur der Mannigfaltigkeit, der kanonischen Divisorenklasse und der topologischen Äquivalenzklasse des Vektorraum-Bündels abhängen." — Das Buch behandelt die Theorie der charakteristischen Cohomologieklassen, da diese für Formulierung und Beweis des Riemann-Rochschen Satzes von entscheidender Bedeutung ist. Die sehr tiefliegende Theorie von Thom, die mit Hilfe der charakteristischen Klassen Bedingungen angibt, unter denen eine n-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit berandet, geht wesentlich in den Beweis ein. Das Buch bringt deshalb auch eine Einführung in diese Theorie.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany